Separable Differentialgleichung

Eine separable Differentialgleichung

$$y' = p(x)g(y)\,,$$

lässt sich durch Trennung der Variablen und separates Bilden von Stammfunktionen lösen:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx\,.$$

Die Integrationskonstante kann dabei durch eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

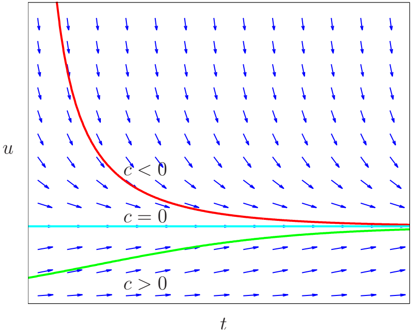
festgelegt werden.

Beispiel:

Die Differentialgleichung

$$u' = p(1-u)u, \quad p > 0\,,$$

modelliert ein Wachstum, das bei zunehmender Dichte ($u(t) \nearrow 1$) abnimmt (logistisches Modell).



Die Abbildung zeigt das Richtungsfeld für $p = 1$ sowie einige der Lösungen

$$u = \frac{e^{pt}}{c + e^{pt}} \,.$$

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int p \, dt$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{u(1-u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}$$

$\leadsto$

$$\ln \left| \frac{u}{u-1} \right| = pt + c' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u}{u-1} = \pm e^{pt+c'}$$

mit einer Integrationskonstante $c' \in \mathbb{R}$
Auflösen nach u $\quad \leadsto \quad$ behauptete Formel für u mit $c = \mp e^{-c'}$