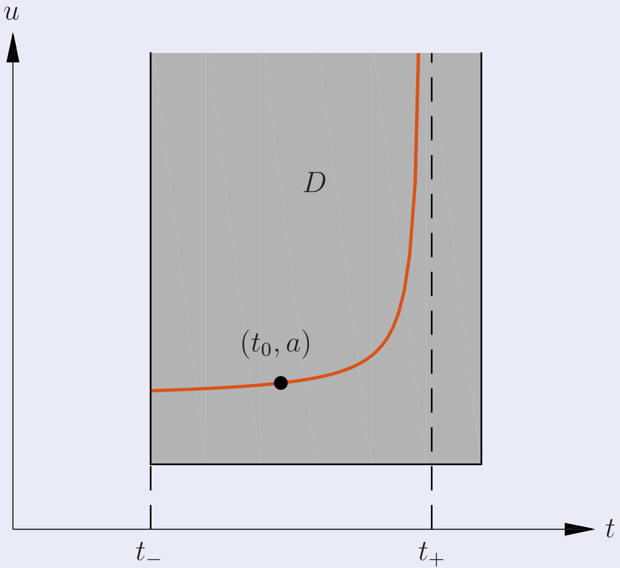
Satz von Peano

Für eine in einer offenen Umgebung D von $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetige Funktion f hat das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

mindestens eine stetig differenzierbare Lösung $(u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$ in einer Umgebung (t_-, t_+) von t_0.

Wie in der Abbildung illustriert ist, verläuft die Lösungskurve bis zum Rand von D. Ist die u-Komponente von D unbeschränkt, ist dabei insbesondere der Fall $|u(t)| \to \infty$ möglich.


u
D
(t_0, a)
t
t_-
t_+

Beispiel:

(i) Keine eindeutige Lösung:

$$u' = 2\sqrt{|u|}, \quad u(0) = 0$$

Lösungen

$$u_\tau = \begin{cases} 0, & x \leq \tau \\ (x-\tau)^2, & x \geq \tau \end{cases}$$

für beliebiges $\tau \geq 0$ bzw. (Symmetrie)

$$u_\tau = \begin{cases} 0, & x \geq \tau \\ -(\tau-x)^2, & x \leq \tau \end{cases}$$

für $\tau \leq 0$

(ii) Kleines Existenzintervall:

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}$$

singulär für $t \to 1$