Phasenebene

Die Lösungen einer autonomen Differentialgleichung zweiter Ordnung,

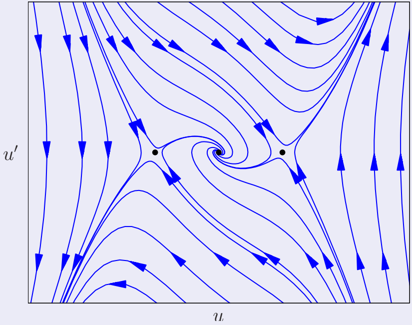
$$u'' = f(u, u')\,,$$

können als Kurven

$$t \mapsto (u(t), v(t)), \quad v = u'\,,$$

in der sogenannten Phasenebene visualisiert werden. Dabei verläuft für eine stetig differenzierbare Funktion f durch jeden Punkt (u_0, v_0) genau eine Lösungskurve.

Punkte $(u_0, 0)$ mit $f(u_0, 0) = 0$ sind kritische Punkte der Differentialgleichung, die konstanten Lösungen $u(t) = u_0$ entsprechen.



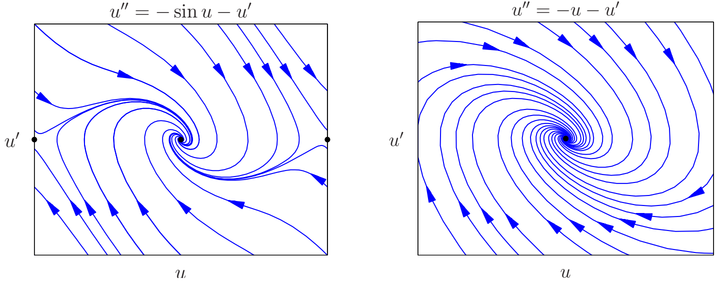
Fasst man $v = du/dt$ als Funktion von u auf, so ist $u'' = v' = dv/dt = (dv/du)(du/dt)$ und man erhält eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{du} v = f(u, v)\,,$$

die die Lösungskurven in der Phasenebene unmittelbar beschreibt.

Beispiel:

Phasenebenen für die Bewegungsgleichung eines gedämpften Pendels und die approximierende lineare Schwingungsgleichung



kleine Auslenkungen von u $\quad\rightsquigarrow\quad$ gute Übereinstimmung
globales qualitatives Verhalten unterschiedlich; mehrere kritische Punkte für die Pendelgleichung

Energieerhaltung

Die Differentialgleichung

$$u'' + \Phi'(u) = 0$$

beschreibt eine eindimensionale Bewegung unter einem durch ein Potential Φ induzierten Kraftfeld.

Für die Lösung u ist die Summe E aus kinetischer und potentieller Energie konstant:

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(u), \quad v = u'\,.$$

Die Lösungskurven in der Phasenebene entsprechen also konstanten Energieniveaus E.

Beispiel:

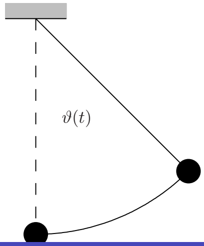
Differentialgleichung für die Auslenkung ϑ eines idealen Pendels

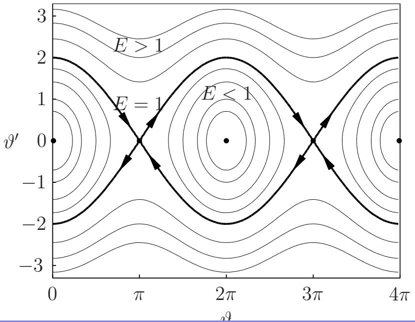
$$\vartheta'' = -\sin\vartheta$$

potentielle Energie $\Phi(\vartheta) = -\cos\vartheta \quad \rightsquigarrow \quad$ Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}(\vartheta')^2 - \cos\vartheta$$

bzw. $\vartheta' = \pm\sqrt{2(E + \cos\vartheta)}$





Phasendiagramm $\quad\rightsquigarrow\quad$ drei qualitativ verschiedene Fälle

- $E < 1$: Lösungen periodisch, da $\cos\vartheta \neq -1$ (maximaler Wert $\vartheta_{\mathrm{max}} = \arccos(-E)$)
  Berechnung der Periode T aus der maximalen Auslenkung ϑ_{max}

$$T = 4 \int\limits_0^{\vartheta_{\mathrm{max}}} \frac{dt}{d\vartheta} d\vartheta\,, \quad \frac{dt}{d\vartheta} = (\vartheta')^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_{\mathrm{max}})}}$$

  $(E = -\cos\vartheta_{\mathrm{max}})$
- $E > 1$: Die Geschwindigkeit ϑ' wird nie null; das Pendel schwingt über.
- $E = 1$: Das Pendel nähert sich dem instabilen höchsten Punkt, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen.

Beispiel:

auf eine Rakete wirkende Kraft im Gravitationsfeld der Erde

$$F = -\frac{\gamma m M}{r^2}$$

m und M: Massen von Rakete und Erde
$\gamma > 0$: Gravitationskonstante
r: Abstand zum Erdmittelpunkt

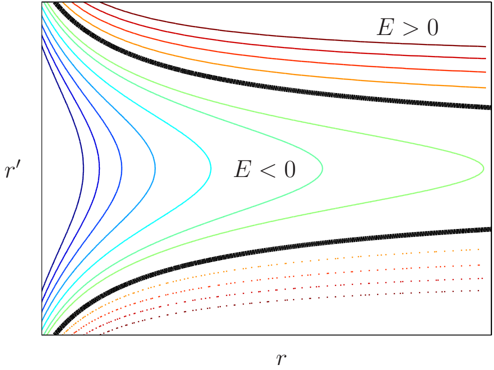
Bewegungsgleichung nach dem “Burnout” bei vertikaler Flugrichtung

$$r'' = -\frac{\gamma M}{r^2}$$

Anfangsbedingungen

$$r(0) = R, \quad r'(0) = v$$

R und v: Flughöhe und Geschwindigkeit bei “Burnout”



Lösungskurven für verschiedene Geschwindigkeiten v und $R = 6.371\,\mathrm{km}$ (Erdradius)
konstante Energieniveaus

$$E = \frac{1}{2}(r')^2 - \frac{\gamma M}{r}$$

$E < 0$: maximale Flughöhe

$$r_{max} = -\frac{\gamma M}{E}$$

$E \geq 0$: Flughöhe unbeschränkt

kritische Startgeschwindigkeit v_* (fett gezeichnete Lösungskurve)

$$\frac{1}{2} v_*^2 - \frac{\gamma M}{R} = E = 0$$

d.h. $v_* = \sqrt{2\gamma \frac{M}{R}}$
($r'(t) \to 0$ für $t \to \infty$)