Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Für bestimmte rechte Seiten f kann eine partikuläre Lösung u der Differentialgleichung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = f(t)$$

durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten bestimmt werden. Einige gebräuchliche Fälle sind

- Polynome:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \to u(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j \,, \quad \text{falls } q \neq 0\,.$$

  Falls $q = 0$, muss u mit t multipliziert werden. Ist zusätzlich $p = 0$, so ist eine weitere Multiplikation mit t erforderlich.

- Exponentialfunktionen:

$$f(t) = \exp(\lambda t) \to u(t) = c\exp(\lambda t)\,,$$

falls $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$.
Ist λ eine einfache (doppelte) Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss c durch ct (ct^2) ersetzt werden.

- Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(\alpha t)(c_1\sin(\omega t) + c_2\cos(\omega t)) \\ \to u(t) &= \exp(\alpha t)(a\sin(\omega t) + b\cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Sind $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms, muss u mit t multipliziert werden.

Treten gemischte Terme auf, so ist die Superposition der entsprechenden Ansätze möglich.

Beispiel:

Differentialgleichung

$$u'' - 3u' - 4u = t + \exp(2t) + \cos(3t)$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$
keine Sonderfälle, da $\lambda_k \neq 0, 2, \pm 3\mathrm{i}$
$\rightsquigarrow$ Standardansatz

$$u(t) = [a + bt] + [c\exp(2t)] + [e\cos(3t) + f\sin(3t)]$$

Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
&u'' - 3u' - 4u = \\
&\qquad [-3b - 4a - 4bt] + [(4c - 6c - 4c)\exp(2t)] \\
&\qquad\qquad +[(-9e - 9f - 4e)\cos(3t) + (-9f + 9e - 4f)\sin(3t)] = \\
&\qquad [-3b - 4a - 4bt] + [-6c\exp(2t)] \\
&\qquad\qquad +[(-13e - 9f)\cos(3t) + (9e - 13f)\sin(3t)]
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite $t + \exp(2t) + \cos(3t)$ $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
-4a - 3b &= 0 \\
-4b &= 1 \\
-6c &= 1 \\
-13e - 9f &= 1 \\
9e - 13f &= 0
\end{aligned}
$$

$\implies b = -1/4,\ a = 3/16,\ c = -1/6,\ e = -13/250,\ f = -9/250$

partikuläre Lösung

$$u_p(t) = \frac{3}{16} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{6}\exp(2t) - \frac{13}{250}\cos(3t) - \frac{9}{250}\sin(3t)$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_h(t) = \alpha\exp(-t) + \beta\exp(4t)$$

allgemeine Lösung $u = u_p + u_h$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 2u' + u = \exp(t), \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 3$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$
Sonderfall $\rightsquigarrow$ Ansatz

$$u(t) = (a + bt + ct^2)\exp(t)$$

Einbeziehung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung durch die Koeffizienten a und b

Anfangsbedingungen $\quad\rightsquigarrow$

$$u(0) = 0 = a, \quad u'(0) = 3 = a + b\,,$$

d.h. $a = 0$, $b = 3$ und $u(t) = (3t + ct^2)\,\exp(t)$
Einsetzen in die Differentialgleichung $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\exp(t) &= \big([2c + 2(3 + 2ct) + (3t + ct^2)] \\
&\qquad -2[(3 + 2ct) + (3t + ct^2)] + [3t + ct^2]\big)\,\exp(t) \\
&= 2c\,\exp(t)
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad c = 1/2$, d.h.

$$u(t) = (3t + t^2/2)\,\exp(t)$$

löst das Anfangswertproblem