Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Für einen konstanten Koeffizienten p kann die Differentialgleichung

$$y' = py + q$$

für bestimmte Funktionen $q(x)$ durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten gelöst werden oder eine partikuläre Lösung y_p ist unmittelbar ersichtlich.

Einige gebräuchliche Fälle sind

- $q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \to y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$ für $p \neq 0$
- $q(x) = c \exp(\lambda x)$, $\lambda \neq p \to y_p = \dfrac{c}{\lambda - p} \exp(\lambda x)$
- $q(x) = c \exp(px) \ \to y_p = cx \exp(px)$
- $q(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x) \to y_p = c \cos(\omega x) + d \sin(\omega x)$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = y_p + c \exp(px)\,.$$

Beweis:

- Polynom q:
  Ableitung des Ansatzes und Indexverschiebung $\quad\leadsto$

$$y_p' = \sum_{j=1}^{n} d_j j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) d_{j+1} x^j$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung $\quad\leadsto$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1) d_{j+1} x^j = p \underbrace{\sum_{j=0}^{n} d_j x^j}_{y_p} + \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

  Koeffizientenvergleich $\quad\leadsto$

$$d_n = -\frac{c_n}{p}\ ,\ d_j = \frac{-c_j}{p} + \frac{(j+1)d_{j+1}}{p},\ j = n-1, \ldots, 0$$

- Exponentialfunktionen q:
  $\leadsto\quad$ direktes Nachrechnen

- Trigonometrischer Ausdruck:
  Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
-c\omega\sin(\omega x) + d\omega\cos(\omega x) &= \\
&p(c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)) + a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)
\end{aligned}$$

  Vergleich der Koeffizienten von $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$
  $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem für c und d:

$$a = -pc + \omega d, \quad b = -\omega c - pd$$

  (Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null)

Beispiel:

Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit Reibung gilt für die Geschwindigkeit $v(t)$

$$mv' = -\alpha v - \gamma m, \quad v(0) = v_0 \ .$$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$v_h = c \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$
partikuläre Lösung

$$v_p = -\frac{\gamma m}{\alpha}$$

Anfangsbedingung $v(0) = v_0 \quad \rightsquigarrow \quad c = v_0 + \gamma m / \alpha$ und

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = -\frac{\gamma m}{\alpha} + \left(v_0 + \frac{\gamma m}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$