Lineares Differentialgleichungssystem

Ein lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = A(t)u + b(t)$$

mit stetiger Koeffizientenmatrix A und stetigem Vektor b besitzt eine eindeutige Lösung $(u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$ für jeden Anfangswert $u(t_0)$. Insbesondere besitzt das homogene System $u' = A(t)u$ n linear unabhängige Lösungen $v, w, \ldots$, d ie man in einer Fundamentalmatrix

$$\Gamma = (v, w, \ldots)$$

zusammenfassen kann.

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems hat die Form

$$u = u_p + u_h, \quad u_h = \Gamma c$$

wobei u_p eine partikuläre Lösung und u_h eine Lösung des homogenen Systems ist, und

$$c = \Gamma(t_0)^{-1}(u(t_0) - u_p(t_0))$$

durch eine Anfangsbedingung in einem Punkt t_0 festgelegt werden kann.

Beweis:

(i) Lokale Existenz und Eindeutigkeit:
Lipschitz-Konstante

$$L = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|A(t)\|$$

(t_1 beliebig)
allgemeine Theorie $\rightsquigarrow$ eindeutige Lösung auf $[t_0, t_\star]$ ($t_\star > t_0$ maximal)
(ii) Globale Existenz:
zeige $t_\star = t_1$ durch Schranke für die Lösung (Ausschluss von Singularitäten)
Multiplikation mit u $\rightsquigarrow$

$$u^{\mathrm{t}} u' = u^{\mathrm{t}} A(t) u + u^{\mathrm{t}} b(t)$$

bzw. mit $r = u^{\mathrm{t}} u = |u|^2$ und der Ungleichung $ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\frac{1}{2} r' \le \|A(t)\| r + \frac{1}{2}\left(r + |b(t)|^2\right)$$

Abschätzung der rechten Seite mit $C = \max_{t \in [t_0, t_1]} (\|A(t)\|, |b(t)|) \quad \rightsquigarrow$

$$r' \leq (2C + 1)r + C^2$$

$r \geq 0 \quad \implies \quad r$ wird majorisiert durch die Lösung von

$$R' = \alpha R + \beta, \quad \alpha = 2C + 1,\ \beta = C^2\,,$$

d.h.

$$r(t) \leq R(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \left(r(t_0) + \frac{\alpha}{\beta} \right) \mathrm{e}^{\alpha(t - t_0)}$$

(ii) Darstellung der Lösung:
Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ als Anfangswerte $u(t_0)$
$\leadsto$ n linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems

überprüfe Form der allgemeinen Lösung $u = u_p + u_h$

- Differentialgleichungssystem:

$$u_p' + u_h' = A(t)u_p + b(t) + A(t)u_h = A(t)(u_p + u_h) + b(t)$$

- Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u_p(t_0) + u_h(t_0) &= u_p(t_0) + \Gamma(t_0)c \\ &= u_p(t_0) + \Gamma(t_0)\Gamma(t_0)^{-1}(u(t_0) - u_p(t_0)) \\ &= u(t_0) \end{aligned}$$

Beispiel:

Differentialgleichungssystem

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix}$$

(i) Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems:
zweite Komponente

$$u_2' = 2u_2$$

$\rightsquigarrow \quad u_2 = \alpha \mathrm{e}^{2t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig
Einsetzen in erste Komponente $\quad \rightsquigarrow$

$$u_1' = u_1 + \alpha t \mathrm{e}^{2t}$$

Ansatz $u_1 = (\beta + \gamma t)\mathrm{e}^{2t} + \delta \mathrm{e}^t \quad \rightsquigarrow$

$$\delta \mathrm{e}^t + \gamma \mathrm{e}^{2t} + 2(\beta + \gamma t)\mathrm{e}^{2t} = \delta \mathrm{e}^t + (\beta + \gamma t)\mathrm{e}^{2t} + \alpha t \mathrm{e}^{2t}$$

bzw. nach Koeffientenvergleich

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{e}: & \delta & = & \delta \\ \mathrm{e}^{2t}: & \gamma + 2\beta & = & \beta \\ t\mathrm{e}^{2t}: & 2\gamma & = & \gamma + \alpha \end{array}$$

$\Longrightarrow \quad \delta \in \mathbb{R}$ beliebig, $\gamma = \alpha$, $\beta = -\alpha$ und

$$u_1 = \delta \mathrm{e}^t + \alpha(t-1)\mathrm{e}^{2t}$$

zwei linear unabhängige Lösungen durch Wahl von $\alpha = 0$, $\delta = 1$ und $\alpha = 1$, $\delta = 0$

$\rightsquigarrow$ Fundamentalmatrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & (t-1)\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

(ii) Partikuläre Lösung:
zweite Komponente des Differentialgleichungssystems

$$u_2' = 2u_2 + \mathrm{e}^t$$

$\rightsquigarrow \quad u_2 = -\mathrm{e}^t$
Einsetzen in erste Komponente des Differentialgleichungssystems

$$u_1' = u_1 - t\mathrm{e}^t + \cos t$$

Ansatz $u_1 = (pt + qt^2)\mathrm{e}^t + r\cos t + s\sin t \quad \rightsquigarrow$

$$u_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

(iii) Allgemeine Lösung:

$$u_p + \Gamma c = u_p + \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t + c_2(t-1)\mathrm{e}^{2t} \\ c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}$$