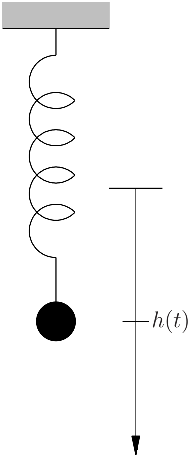
Beispiel:

Die Differentialgleichung

$$h'' = -\omega^2 h + f$$

beschreibt die Auslenkung einer Feder unter einer Kraft f.



allgemeine Lösung für $f(t) = -g$

$$h(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega^2} g$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen
z.B.: $h(0) = 0$, $h'(0) = g \quad \Longrightarrow$

$$h(t) = \frac{g}{\omega^2}(\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - 1)$$

Linearer Oszillator

Die Auslenkung $u(t)$ eines linearen Oszillators bei periodischer Anregung wird durch die Differentialgleichung

$$u'' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t), \quad \omega_0 > 0\,,$$

beschrieben.
Die allgemeine Lösung setzt sich aus einer freien und einer erzwungenen Schwingung zusammen, $u = u_h + u_p$, wobei

$$u_h(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

und

$$u_p(t) = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right), \quad \omega \neq \omega_0\,,$$

sowie

$$u_p(t) = \frac{c}{2\omega}\, t \sin(\omega t)$$

im Resonanzfall $\omega = \omega_0$.
Die Konstanten a, b können durch Anfangsbedingungen festgelegt werden:

$$a = u(0), \quad b = u'(0)/\omega_0\,.$$

Beweis:

$\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$ erfüllen die homogene Differentialgleichung

$$u'' + \omega_0^2 u = 0\,.$$

Linearkombination $\rightsquigarrow$ Lösung u_h der Differentialgleichung mit $c = 0$

Direktes Nachrechnen $\rightsquigarrow$ Lösung u_p der Differentialgleichung

- $\omega \neq \omega_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) + \omega_0^2 \cos(\omega t) = (\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t)$$

Multiplikation mit $c/(w_0^2 - w^2)$ $\rightsquigarrow$ rechte Seite $c\cos(\omega t)$
addiere $(c/(\omega^2 - \omega_0^2))\cos(\omega_0 t)$
$\rightsquigarrow$ partikuläre Lösung mit doppelter Nullstelle bei $t = 0$:

$$u_p = c\,\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- $\omega = \omega_0$:
  Grenzübergang $\omega_0 \to \omega \quad \rightsquigarrow$

$$\lim_{\omega_0 \to \omega} c \, \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{\omega_0 \to \omega} c \, \frac{-t \sin(\omega_0 t)}{-2\omega_0}$$

  (Differentiation nach ω_0)

doppelte Nullstelle der partikulären Lösungen bei $t = 0$
$\Longrightarrow$ Bestimmung von a und b aus den Anfgangswerten von u_h

Beispiel:

Für die Differentialgleichung

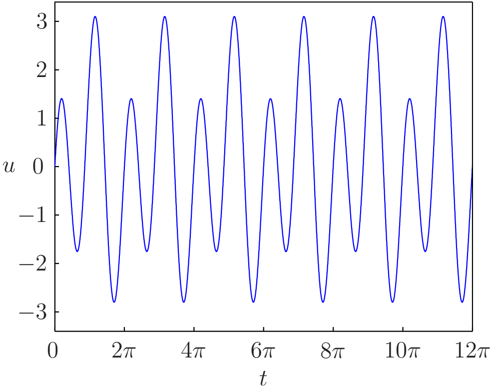
$$u'' + 4u = 3\cos t$$

ist $\omega_0 = 2$, $\omega = 1$ und $c = 3$.

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} u(t) &= \underbrace{a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)}_{u_h} + \underbrace{c\,\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}}_{u_p} \\ &= a\cos(2t) + b\sin(2t) + \frac{3}{1-4}\,(\cos(2t) - \cos t) \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$



Anfangswerte

$$u(0) = 0, u'(0) = 2$$

$\rightsquigarrow$ abgebildete (2π)-periodische Lösung

$$u(t) = \sin(2t) - \cos(2t) + \cos t$$

mit $a = u(0) = 0$ und $b = u'(0)/\omega_0 = 2/2 = 1$

Beispiel:

Für die Differentialgleichung

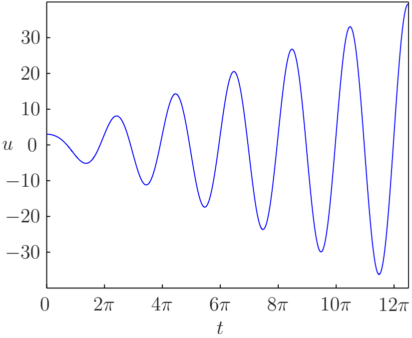
$$u'' + u = 2\cos t$$

ist $\omega_0 = \omega = 1$ (Resonanz), $c = 2$.

allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u &= \underbrace{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}_{u_h} + \underbrace{\frac{c}{2\omega}\, t\sin t}_{u_p} \\ &= a\cos t + b\sin t + t\sin t \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$



Anfangswerte

$$u(0) = 3, u'(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ abgebildete Lösung

$$u(t) = 3\cos t + t\sin t$$

mit $a = u(0) = 3$ und $b = u'(0)/\omega = 0$
Resonanz $\rightsquigarrow$ lineares Wachstum