Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$y' = py + q$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y = y_p + y_h\,.$$

Dabei ist y_p eine partikuläre (oder spezielle) Lösung und y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($q(x) = 0$).

Bezeichnet

$$P(x) = \int p(x)\, dx$$

eine Stammfunktion von p, so gilt

$$y_h = c \exp(P(x))\,,$$

mit einer beliebig wählbaren Konstanten $c \in \mathbb{R}$, und

$$y_p = \int\limits_{x_0}^{x} \exp(P(x) - P(s)) q(s)\, ds$$

ist eine partikuläre Lösung mit $y_p(x_0) = 0$.
Für die allgemeine Lösung $y = y_p + y_h$ zu der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist

$$c = y_0 \exp(-P(x_0))\,.$$

Beweis:

Ist y_h eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h' = p y_h$$

und P eine Stammfunktion von p, so gilt

$$[y_h \exp(-P)]' = y_h' \exp(-P) - y_h p \exp(-P) = 0\,.$$

$\implies \quad [\cdots] = c$ mit einer Konstanten c, also $y_h = c\exp(P)$ wie behauptet

Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$y_p = C(x)\exp(P(x))$$

(Variation der Konstanten)

Einsetzen von y_p in die Differentialgleichung $\quad\rightsquigarrow$

$$C' \exp(P) + Cp \exp(P) = pC \exp(P) + q$$

$\rightsquigarrow$

$$C' = q \exp(-P)$$

und damit

$$y_p(x) = \left(\int\limits_{x_0}^{x} \exp(-P(s)) q(s)\, ds \right) \exp(P(x))$$

Beispiel:

Es soll die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{p} y + \underbrace{x^3}_{q}$$

sowie die Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = 4$ bestimmt werden.

Stammfunktion von p

$$P(x) = \ln(1 + x^2)$$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = py$

$$y_h(x) = c\mathrm{e}^{P(x)} = c(1 + x^2)$$

partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x e^{\ln(1+x^2)-\ln(1+s^2)} s^3 ds \\ &= (1+x^2)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) \end{aligned}$$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + y_h = (1+x^2)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c\right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$

Anfangswert $y(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 4$