Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen

Für die Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen gilt

$$u(t) = t^n \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)\,.$$

Mit $a = \lambda + \mathrm{i}\omega$ erhält man insbesondere die Laplace-Transformation von trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)\cos(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \\ \exp(\lambda t)\sin(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\,. \end{aligned}$$

Beweis:

$$U_n(s) = \int_0^\infty t^n \exp(-(s-a)t)\,dt$$

partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} U_n(s) &= -\int_0^\infty nt^{n-1}\left(-\frac{1}{s-a}\right)\exp(-(s-a)t)\,dt = \frac{n}{s-a}\,U_{n-1}(s) \\ &= \cdots \\ &= \frac{n!}{(s-a)^n}\,U_0(s) \end{aligned}$$

mit

$$U_0(s) = \int_0^\infty \exp(-(s-a)t)\,dt = \frac{1}{s-a}$$

für $a = \lambda + \mathrm{i}\omega$,

$$u(t) = \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s - \lambda - \mathrm{i}\omega} = \frac{(s-\lambda) + \mathrm{i}\omega}{(s-\lambda)^2 + \omega^2}$$

Bilden von Real- und Imaginärteil
$\leadsto$ Laplace-Transformation der trigonometrischen Funktionen

Beispiel:

Illustration der Transformationsregel für die Grundfunktionen

$$t^n e^{at}, \quad e^{\lambda t}\cos(\omega t), \quad e^{\lambda t}\sin(\omega t)$$

anhand einiger Beispiele

$u(t)$	$U(s)$
$2t^3 - 1$	$\dfrac{12}{s^4} - \dfrac{1}{s}$
$e^{4t}(t-5)$	$\dfrac{1}{(s-4)^2} - \dfrac{5}{s-4}$
$2\sin(3t)\cos(3t)$	$\dfrac{6}{s^2+36}$
$e^{-t}\cos(7t)$	$\dfrac{s+1}{(s+1)^2+49}$