Laplace-Transformation periodischer Funktionen

Ist u eine T-periodische Funktion, d.h. $u(t) = u(t + T)$, so folgt für die Laplace-Transformierte

$$U(s) = \frac{\int_0^T \exp(-st)u(t)\,dt}{1 - \exp(-Ts)}\,.$$

Beweis:

$$U(s) = \int_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt = \sum_{j=0}^\infty \underbrace{\int_{jT}^{(j+1)T} u(t)\exp(-st)\,dt}_{I_j}$$

Periodizität von u $\implies$

$$I_j = \int_0^T u(t)\exp(-s(t+jT))\,dt = \exp(-jTs)\underbrace{\int_0^T u(t)\exp(-st)\,dt}_{I_0}$$

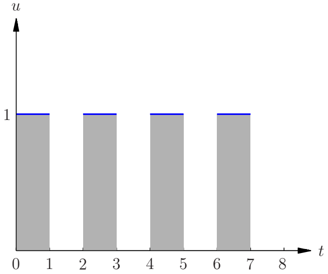
Formel für die geometrische Reihe $\rightsquigarrow$

$$U(s) = I_0 \sum_{j=0}^\infty \exp(-jTs) = \frac{I_0}{1-\exp(-Ts)}$$

Beispiel:

Laplace-Transformation des Einheitsimpulses u:

$$U(s) = \int_0^1 \exp(-st)\,dt = \frac{1-\exp(-s)}{s}$$



2-periodische Fortsetzung

$$\tilde{U}(s) = \frac{U(s)}{1-\exp(-2s)} = \frac{1}{s(1+\exp(-s))}$$