Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die Laplace-Transformierte der Lösung u des Anfangswertproblems

$$u'' + pu' + qu = f(t), \quad u(0) = a,\, u'(0) = b$$

ist

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q} \left(F(s) + as + ap + b \right) .$$

Die Lösung kann also durch Faltung berechnet werden,

$$u = \underbrace{a\varphi' + (ap + b)\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$.

Bezeichnen λ und ϱ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Phi^{-1}(s) = s^2 + ps + q$, so gilt

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}, & \lambda \neq \varrho \\ t\mathrm{e}^{\lambda t}, & \lambda = \varrho . \end{cases}$$

Beweis:

Laplace-Transformation der Differentialgleichung

$$s^2 U(s) - su(0) - u'(0) + p(sU(s) - u(0)) + qU(s) = F(s)$$

$u(0) = a,\ u'(0) = b \quad \rightsquigarrow \quad$ Formel für U

(i) $\lambda \neq \varrho$:

Partialbruchzerlegung

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s-\lambda)(s-\varrho)} = \frac{1}{\lambda - \varrho}\left(\frac{1}{s-\lambda} - \frac{1}{s-\varrho}\right)$$

$$\implies \quad \varphi(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}$$

Rücktransformation der einzelnen Terme mit Hilfe der Faltungsregel, Transformation einer Ableitung und Linearität $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\Phi(s)\,F(s) &\longrightarrow (\varphi \star f)(t)\\ \Phi(s)\,as &\longrightarrow a\varphi'(t), \quad \text{da}\,\varphi(0)=0\\ \Phi(s)\,(ap+b) &\longrightarrow (ap+b)\varphi(t)\end{aligned}$$

(ii) $\quad \lambda = \varrho$:

$$\varphi(t) = \lim_{\varrho\to\lambda} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\varrho t}}{\lambda - \varrho} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{\varrho\to\lambda} \frac{-t\mathrm{e}^{\varrho t}}{-1} = t\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Rücktransformation analog

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 3u' + 2u = 1\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u'(0) = 1$$

Laplace-Transformation $\quad \rightsquigarrow$

$$U(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}\left(\frac{1}{s} + 1\right)$$

Partialbruchzerlegung

$$U(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s-2} - 2\,\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s}$$

inverse Laplace-Transformation der elementaren Terme $\quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = \frac{3}{2}\exp(2t) - 2\exp(t) + \frac{1}{2}$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' + 2u' + 5u = \exp(-3t)\ , \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 0$$

Laplace-Transformation $\quad\rightsquigarrow$

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}\ \frac{1}{s+3}$$

Partialbruchzerlegung

$$U(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{8}\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{8}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

inverse Laplace-Transformation der elementaren Terme $\quad\rightsquigarrow$

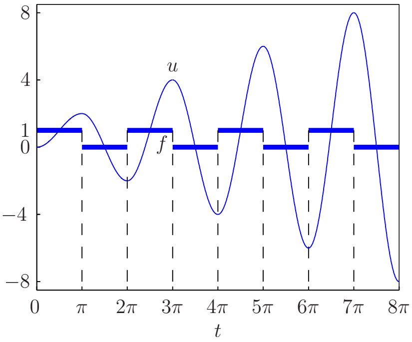
$$u(t) = \frac{1}{8}\exp(-3t) - \frac{1}{8}\exp(-t)\cos(2t) + \frac{1}{8}\exp(-t)\sin(2t)$$

Beispiel:

Es soll das Anfangswertproblem

$$u'' + u = f\,, \quad u(0) = u'(0) = 0$$

für die abgebildete stückweise konstante Impulsfunktion f gelöst werden.



Laplace-Transformation $\quad \rightsquigarrow$

$$(s^2+1)\,U(s) = F(s)$$

$\Leftrightarrow$

$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2+1}}_{\Phi(s)}\, F(s)$$

$\varphi(t) = \sin t$, Faltungsregel $\quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = \int\limits_0^t \sin(t-s) f(s)\, ds$$

Fallunterscheidung aufgrund der stückweisen Definition von f

(i) $\quad t \in [2\ell\pi, (2\ell+1)\pi]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \int\limits_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(t-s)ds + \int\limits_{2\ell\pi}^{t} \sin(t-s)ds \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1}(\cos(t-\pi) - \cos t) + (1-\cos t) \\ &= 1-(2\ell+1)\cos t \end{aligned}$$

denn $\cos(t-\pi) = -\cos t$
(ii) $\quad t \in [(2\ell+1)\pi, (2\ell+2)\pi]$:
Ersetzen von $\int_{2\ell\pi}^{t} \dots$ durch $\int_{2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} \dots \quad \leadsto$

$$u(t) = -(2\ell+2)\cos t$$

lineares Wachstum der Lösung wie im Resonanzfall