Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Laplace-Transformierte der Lösung u des Anfangswertproblems

$$u' + pu = f(t), \quad u(0) = a$$

ist

$$U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)\,.$$

Die Lösung kann also durch Faltung mit der inversen Transformation $\varphi(t) = \exp(-pt)$ von $\Phi(s) = (s+p)^{-1}$ berechnet werden,

$$u = \underbrace{a\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$.

Beweis:

Laplace-Transformation der Differentialgleichung

$$sU(s) - a + pU(s) = F(s) \;\longrightarrow\; U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)$$

Darstellung von u durch inverse Laplace-Transformation

$$\varphi(t) = \exp(-pt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(s) = 1/(s+p)$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{F(s)}{s+p} &\quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad \varphi \star f \\ \frac{a}{s+p} &\quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad a\varphi \end{aligned}$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' - u = \exp(t), \quad u(0) = 0$$

Laplace-Transformation $\quad \rightsquigarrow$

$$sU(s) - u(0) - U(s) = \frac{1}{s-1}$$

und nach Auflösen nach U

$$U(s) = \frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}$$

Formel für die inverse Transformation einer abgeleiteten Funktion

$$-\frac{d}{ds} \longrightarrow \text{Multiplikation mit } t$$

$\rightsquigarrow$

$$u(t) = t\exp(t)$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' - 3u = t\exp(2t)\ , \quad u(0) = a$$

Laplace-Transformation $\quad \rightsquigarrow$

$$sU(s) - a - 3U(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s-3}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + a\right)$$

Partialbruchzerlegung von U

$$U(s) = \frac{a+1}{s-3} - \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

inverse Laplace-Transformation der elementaren Terme $\quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = (a+1)\exp(3t) - \exp(2t) - t\exp(2t)$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' + u = \cos(2t)\ , \quad u(0) = 3$$

Laplace-Transformation $\quad\rightsquigarrow$

$$sU(s) - 3 + U(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{s}{s^2+4} + 3\right)$$

Rücktransformation der elementaren Terme

$$\Phi(s) = \frac{1}{s+1} \ \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow}\ \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad \Psi(s) = \frac{s}{s^2+4} \ \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow}\ \psi(t) = \cos(2t)$$

Faltungsregel $\Phi\Psi \ \stackrel{\mathcal{L}^{-1}}{\longrightarrow}\ \varphi \star \psi \quad \rightsquigarrow \quad$ inverse Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} u(t) &= 3e^{-t} + \int\limits_0^t e^{-(t-r)} \cos(2r) dr \\ &= \frac{14}{5} \exp(-t) + \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t) \end{aligned}$$