Jordan-Form eines linearen Differentialgleichungssystems

Das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au + b(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}\,,$$

kann durch Transformation auf Jordan-Form, $A \to J = Q^{-1}AQ$, gelöst werden.
Mit $u = Qv$, $c = Q^{-1}b$ folgt

$$\begin{aligned}
v_n' &= \lambda_n v_n + c_n(t) \\
v_{n-1}' &= \lambda_{n-1} v_{n-1} + \varrho_n v_n + c_{n-1}(t) \\
&\vdots \\
v_1' &= \lambda_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + c_1(t)\,,
\end{aligned}$$

wobei λ_k die Eigenwerte von A (bzw. Diagonalelemente von J) sind und $\varrho_k \in \{0, 1\}$. Diese skalaren linearen Differentialgleichungen für v_k lassen sich sukzessive für $k = n, \ldots, 1$ lösen.

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ -1 & 14 & -1 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}}_{A} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformation

$$u = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} v$$

$\rightsquigarrow$ Jordan-Form

$$v' = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{J=Q^{-1}AQ} v \,, \qquad v(0) = Q^{-1}u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösungen der letzten beiden Differentialgleichungen

$$v_3 = 2\exp(10t), \quad v_2 = -2\exp(10t)$$

Einsetzen in die erste Differentialgleichung $\quad \rightsquigarrow$

$$v_1' = 10v_1 - 2\exp(10t)\ , \qquad v_1(0) = -1\,,$$

d.h.

$$v_1 = -2t\exp(10t) - \exp(10t)$$

Rücktransformation $\quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = Qv(t) = \begin{pmatrix} -3v_1 - v_3 \\ -v_1 \\ -v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 2t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{10t}$$