# Integrierender Faktor

Wird eine Differentialgleichung

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$$

durch Multiplikation mit einer Funktion $a(x, y)$ exakt, d.h. ist

$$(ap)_y = (aq)_x \,,$$

so bezeichnet man $a$ als integrierenden Faktor.

# Beispiel:

$$\underbrace{y}_{p} + \underbrace{x(2xy-1)}_{q} y' = 0$$

nicht exakt, denn $p_y = 1 \neq 4xy - 1 = q_x$
Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $1/x^2$
$\rightsquigarrow$ exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{y/x^2}_{\tilde{p}} + \underbrace{(2y - 1/x)}_{\tilde{q}} y' = 0, \quad \tilde{p}_y = 1/x^2 = \tilde{q}_x$$

Implizite Darstellung der Lösung

$$F(x,y) = y^2 - y/x = c$$

Bestätigung durch Überprüfung der Identität

$$\operatorname{grad} F = (y/x^2,\, 2y - 1/x)^{\mathrm{t}} \overset{!}{=} (\tilde{p},\, \tilde{q})^{\mathrm{t}} \quad \checkmark$$