Homogene Differentialgleichung zweiter Ordniung mit konstanten Koeffizienten

Die Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ hat je nach Typ der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + p\lambda + q$$

folgende Form:

- zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$u(t) = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$$

- eine doppelte Nullstelle λ:

$$u(t) = a \exp(\lambda t) + bt \exp(\lambda t)$$

- zwei komplex konjugierte Nullstellen $-p/2 \pm \varrho\mathrm{i}$:

$$u(t) = \exp\left(-\frac{pt}{2}\right)(a \cos(\varrho t) + b \sin(\varrho t))$$

Die Konstanten a, b können durch Anfangsbedingungen festgelegt werden.

Beweis:

Einsetzen des Ansatzes $u(t) = \exp(\lambda t)$ in die Differentialgleichung

$$\lambda^2 \exp(\lambda t) + p\lambda \exp(\lambda t) + q \exp(\lambda t) = 0$$

$\implies$ charakteristisches Polynom $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(i) zwei verschiedene Nullstellen λ_j:
linear unabhängige Lösungen

$$\exp(\lambda_j t), \quad j = 1, 2$$

für $\lambda = -p/2 \pm \varrho\mathrm{i}$, reelle Lösungen durch Bilden von Linearkombinationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\exp((-p/2 + \varrho\mathrm{i})t) + \exp((-p/2 - \varrho\mathrm{i})t)\right) &= \exp(-pt/2)\cos(\varrho t) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp((-p/2 + \varrho\mathrm{i})t) - \exp((-p/2 - \varrho\mathrm{i})t)\right) &= \exp(-pt/2)\sin(\varrho t) \end{aligned}$$

(ii) doppelte Nullstelle λ:

$$2\lambda + p = 0 \qquad \text{(charakteristisches Polynom ableiten)}$$

$\rightsquigarrow$ zweite, linear unabhängige Lösung $t\exp(\lambda t)$:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt}\right)^2 (t\exp(\lambda t)) + p\frac{d}{dt}(t\exp(\lambda t)) + qt\exp(\lambda t) \\
&= [2\lambda\exp(\lambda t) + \lambda^2 t\exp(\lambda t)] + [p\exp(\lambda t) + p\lambda t\exp(\lambda t)] + [qt\exp(\lambda t)] \\
&= \big((2\lambda + p) + (\lambda^2 + p\lambda + q)t\big)\exp(\lambda t) = 0
\end{aligned}$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 2u' - 8u = 0, \qquad u(0) = 2,\ u'(0) = 2$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$a \exp(-2t) + b \exp(4t)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2 &= u(0) &= a+b \\ 2 &= u'(0) &= -2a+4b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a=b=1$, d.h.

$$u(t) = \exp(-2t) + \exp(4t)$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 2u' + u = 0, \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

mit der doppelten Nullstelle

$$\lambda_{1,2} = 1$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(a + bt)\exp(t)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u(0) = 1 &= a \\ u'(0) = 0 &= a + b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad a = 1,\ b = -1$, d.h.

$$u(t) = (1 - t)\exp(t)$$