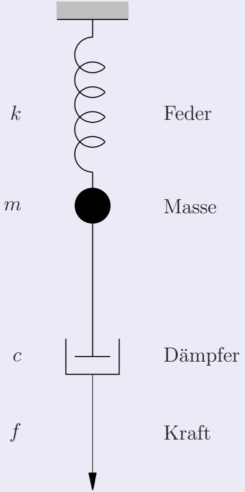
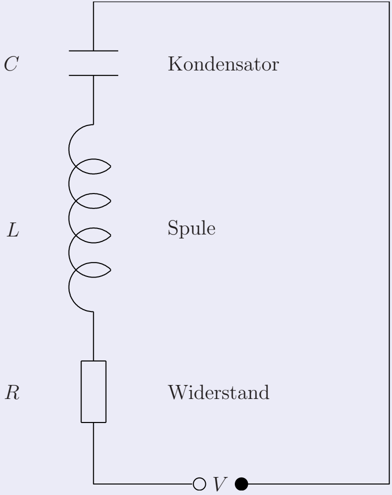
Gedämpfte harmonische Schwingung

Die Differentialgleichung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t)$$

mit $r > 0$ modelliert sowohl eine elastische Feder als auch einen elektrischen Schwingkreis.





$$2r = \frac{c}{m}\ , \ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$2r = \frac{R}{L}\ , \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Je nach Typ der Lösungen u_h der homogenen Differentialgleichung ($c = 0$) unterscheidet man

- starke Dämpfung ($r > \omega_0$):

$$u_h = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

mit $\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$

- kritische Dämpfung ($r = \omega_0$):

$$u_h = (a + bt)\exp(-rt)$$

- schwache Dämpfung ($r < \omega_0$):

$$u_h = \exp(-rt)\,(a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t))$$

mit $\lambda = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$.

Eine partikuläre Lösung ist

$$u_p(t) = c' \cos(\omega t + \delta)$$

mit der Amplitude

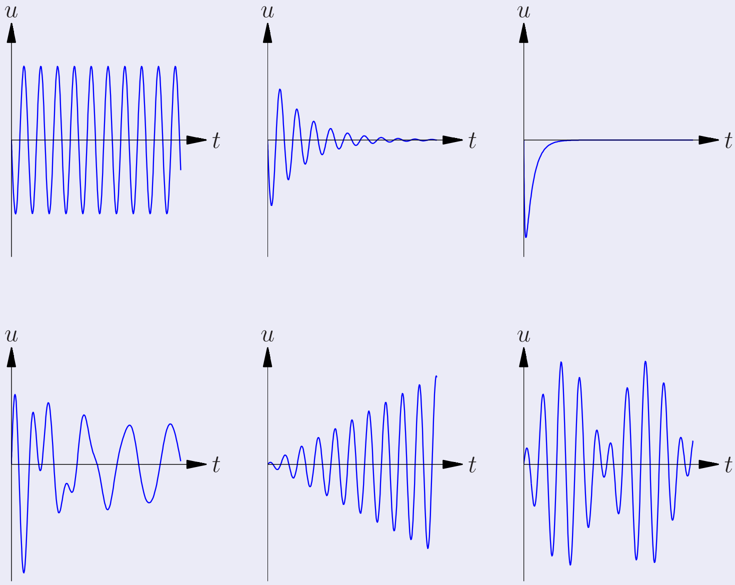
$$c' = c / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

und der Phase

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}2r\omega)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhält man durch Addition von u_h:

$$u = u_p + u_h \, .$$



Das qualitative Verhalten von Lösungen kann sehr unterschiedlich sein.

Beweis:

(i) Lösung der homogenen Differentialgleichung:
Der Typ der Lösungen ist durch das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2r\lambda + \omega_0^2$ bestimmt.

(ii) Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:
Einsetzen von

$$u_p = \mathrm{Re}\left(c' \exp(\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\delta)\right)$$

$\leadsto$

$$\mathrm{Re}\left(c' \exp(\mathrm{i}\delta)(-\omega^2 + 2r\omega\mathrm{i} + \omega_0^2) \exp(\mathrm{i}\omega t)\right) = c\cos(\omega t)$$

$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\exp(\mathrm{i}\omega t) \implies$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2r\omega\mathrm{i} = \frac{c}{c'}\exp(-\mathrm{i}\delta)\,,$$

d.h.

$$c' = \frac{c}{|\omega_0^2 - \omega^2 + 2r\omega\mathrm{i}|}, \quad \delta = \arg\left(\overline{\omega_0^2 - \omega^2 + 2r\omega\mathrm{i}}\right)$$

Beispiel:

Schwingungsgleichung

$$u'' + 5u' + 6u = 2\cos t$$

$\rightsquigarrow \quad 2r = 5,\ \omega_0 = \sqrt{6},\ \omega = 1,\ c = 2)$
starke Dämpfung: $r > \omega_0$
Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 5\lambda + 6$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_h = a\exp(-3t) + b\exp(-2t)$$

partikuläre Lösung

$$u_p = c' \cos(\omega t + \delta)$$

mit

$$\begin{aligned} c' &= \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(6-1)^2 + (5\cdot 1)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \\ \delta &= \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - 2r\omega\mathrm{i}) = \arg((6-1) - (5\cdot 1)\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

d.h.

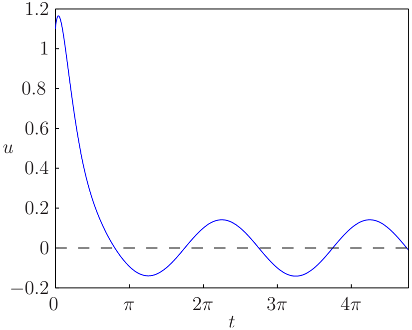
$$\begin{aligned} u &= u_h + u_p \\ &= a\exp(-3t) + b\exp(-2t) + \frac{2}{5\sqrt{2}}\cos(t - \pi/4) \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

$$u(0) = \frac{6}{5}, \quad u'(0) = \frac{6}{5}$$

$\rightsquigarrow$

$$u(t) = -3\exp(-3t) + 4\exp(-2t) + \frac{2}{5\sqrt{2}}\cos(t - \pi/4)$$



starke Dämpfung $\quad\rightsquigarrow\quad$ schneller Übergang in eine harmonische Schwingung

Beispiel:

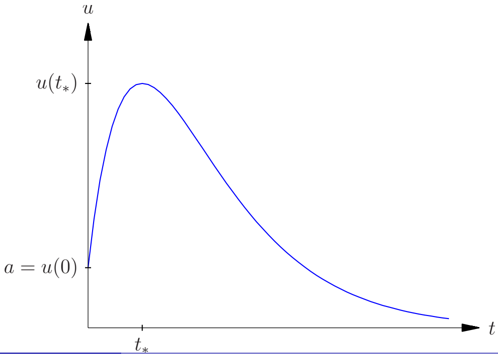
Schwingungsgleichung

$$u'' + 2\omega_0 u' + \omega_0^2 u = 0$$

kritische Dämpfung: $r = \omega_0$

$$u_h = (a + bt)\exp(-\omega_0 t)$$

starkes Anfangswachstum möglich



$\omega_0 = 1 \quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = (a + bt)\,\exp(-t)$$

maximal für $t_* = \frac{b-a}{b}$ und

$$\frac{|u(t_*)|}{|u(0)|} = \frac{b}{a} \exp\left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

$\to \infty$ für $a/b \to 0$
(hohe Spannungen beim Ausschalten von Stromkreisen!)

Beispiel:

Schwingungsgleichung

$$u'' + 2u' + 50u = e^{\mathrm{i}\omega t}$$

schwache Dämpfung: $1 = r < \omega_0 = \sqrt{50}$
charakteristisches Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 50$ mit den komplex konjugierten Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1 \pm 7\mathrm{i}$
$\leadsto$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_h = e^{-t}(a\cos(7t) + b\sin(7t))$$

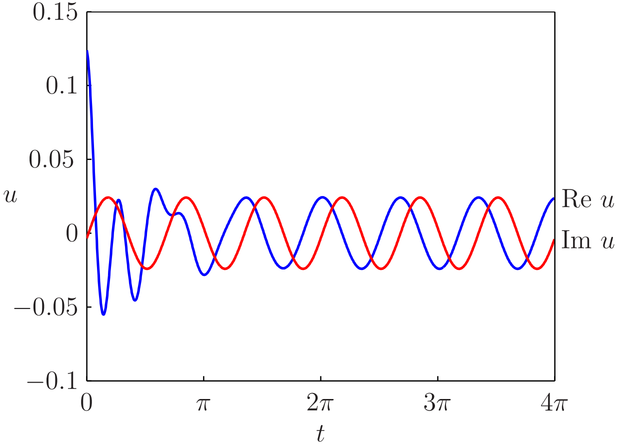
partikuläre Lösung

$$u_p = ce^{\mathrm{i}\omega t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung $\leadsto$

$$c = \frac{1}{-\omega^2 + 2\omega\mathrm{i} + 50}$$

Real- und Imaginärteil von $u = u_h + u_p$ für $a = 1/10$, $b = 0$, $\omega = 3$
schwache Dämpfung $\rightsquigarrow$ langsames Abklingen des homogenen Lösungsanteils



Betrag der komplexen Amplitude

$$|c| = \frac{1}{|(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega \mathrm{i}|} = \frac{1}{\sqrt{(50-\omega^2)^2 + (2\omega)^2}}$$

maximal für $\omega_* = \sqrt{48}$, denn

$$W = \omega^2,\ 0 = \frac{d}{dW}(50-W)^2 + 4W = -2(50-W) + 4 \quad \Longrightarrow \quad W = 48$$

relativ kleiner Dämpfungskoeffizient $2r = 2$

$\Longrightarrow$ Resonanzfrequenz ω_* nahe bei $\omega_0 = \sqrt{50}$