Faltung und Laplace-Transformation

Für die Laplace-Transformation der Faltung zweier Funktionen

$$(u \star v)(t) = \int_0^t v(t-r)u(r)\,dr$$

gilt

$$\mathcal{L}(u \star v) = (\mathcal{L}u)(\mathcal{L}v)\,.$$

Beweis:

Vertauschen der Integrationsgrenzen $\quad \rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
(u \star v)(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad & \int_0^\infty \int_0^t v(t-r)u(r)\exp(-st)\,dr\,dt \\
= \quad & \int_0^\infty \int_r^\infty v(t-r)u(r)\exp(-s(t-r))\exp(-sr)\,dt\,dr \\
= \quad & \int_0^\infty \int_0^\infty v(\tau)u(r)\exp(-s\tau)\exp(-sr)\,d\tau\,dr \\
= \quad & U(s)V(s)
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Laplace-Transformation der Faltung von $u = \exp(at)$ und $v = \exp(bt)$

$$(u \star v)(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)V(s) = \frac{1}{s-a}\frac{1}{s-b} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$$

inverse Laplace-Transformation $\quad \rightsquigarrow$

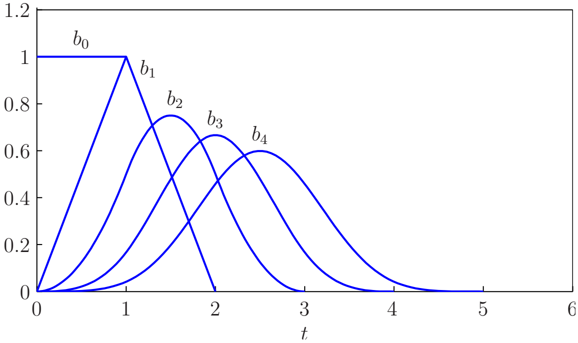
$$(u \star v)(t) = \frac{\exp(at) - \exp(bt)}{a-b}$$

Übereinstimmung mit der direkten Berechnung:

$$\begin{aligned}(u \star v)(t) &= \int_0^t \exp(a(t-r))\exp(br)\,dr \\ &= \exp(at)\left[\frac{\exp((b-a)r)}{b-a}\right]_0^t \\ &= \frac{\exp(bt) - \exp(at)}{b-a}\end{aligned}$$

Beispiel:

Mit Hilfe der abgebildeten B-Splines b_j kann eine Basis für die stückweisen Polynome vom Grad $\leq j$ gebildet werden.



rekursive Definition durch Faltung ausgehend von der charakteristischen Funktion b_0 des Intervalls $[0,1]$:

$$b_{j+1}(t) = (b_j \star b_0)(t) = \int_0^t b_j(t-r) b_0(r)\,dr = \int_0^1 b_j(t-r)\,dr$$

denn $b_j(s) = 0$ für $s = t - r \le 0$
Laplace-Transformation der B-Splines:

$$\begin{aligned} b_0(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1-\exp(-s)}{s}\,, \\ b_j(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \left(\frac{1-\exp(-s)}{s}\right)^{j+1} = s^{-(j+1)} \sum_{k=0}^{j+1} c_k \exp(-ks) \end{aligned}$$

mit

$$c_k = (-1)^k \begin{pmatrix} j+1 \\ k \end{pmatrix}$$

Rücktransformation mit Hilfe der Verschiebungsregel $\rightsquigarrow$

$$b_j(t) = \sum_{k=0}^{j+1} c_k \frac{1}{j!}(t-k)_+^j$$

mit den sogenannten abgebrochenen Potenzen

$$(t-k)_+^j = \begin{cases} 0 & : \quad t < k \\ (t-k)^j & : \quad t \geq k \end{cases}$$