Exakte Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$q(x,y)y' + p(x,y) = 0$$

heißt exakt, wenn eine Stammfunktion F existiert mit

$$p = F_x,\ q = F_y \quad \Leftrightarrow \quad (p,q)^{\mathrm{t}} = \operatorname{grad} F\,.$$

Die Lösungen lassen sich dann implizit als Niveaulinien darstellen,

$$F(x,y) = c\,,$$

wobei die Konstante c durch eine Anfangsbedingung festgelegt werden kann.

Man schreibt eine exakte Differentialgleichung oft auch in der Form

$$pdx + qdy = 0\,,$$

um die symmetrische Behandlung der Variablen x und y hervorzuheben. In Anlehnung an die Theorie der Arbeitsintegrale ist bei stetig differenzierbaren Funktionen p und q die Integrabilitätsbedingung

$$p_y = q_x$$

notwendig für die Existenz von F. Sie ist hinreichend, falls das betrachtete Definitionsgebiet einfach zusammenhängend ist.

Beweis:

Existenz der Stammfunktion, Kettenregel $\quad\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = F_x(x,y(x)) + F_y(x,y(x))y'(x)\,,$$

d.h. die Niveaulinien entsprechen Lösungen:

$$F = c \quad\Longrightarrow\quad p + qy' = 0$$

Vertauschbarkeit partieller Ableitungen $\quad\Longrightarrow$

$$p_y = F_{xy} = F_{yx} = q_x\,,$$

d.h. die Notwendigkeit der Integrabilitätsbedingung

Für ein einfach zusammenhängendes Parametergebiet ist eine Stammfunktion F als Arbeitsintegral darstellbar:

$$F(x,y) = \int\limits_C p\,dx + q\,dy, \quad C:\,(x_0,y_0) \to (x,y)$$

mit einem Weg C, der einen fest gewählten Punkt (x_0,y_0) mit (x,y) verbindet
Die Wegunabhängigkeit ist durch die Integrabilitätsbedingung garantiert.
Parametrisierung

$$C:\,[a,b] \ni t \mapsto (u(t), v(t))$$

$\rightsquigarrow$ explizite Form für F:

$$F(x,y) = \int\limits_a^b p(u(t),v(t))u'(t) + q(u(t),v(t))v'(t)\,dt$$

Beispiel:

exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{(6x-2y)}_{q}\,y' + \underbrace{7x+6y}_{p} = 0$$

prüfe die Integrabilitätsbedingung:

$$q_x = 6 = p_y \quad \checkmark$$

p und q auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert $\quad\Longrightarrow\quad$ Existenz einer Stammfunktion
Konstruktion durch achsenparallele Integration
$q = F_y \implies$

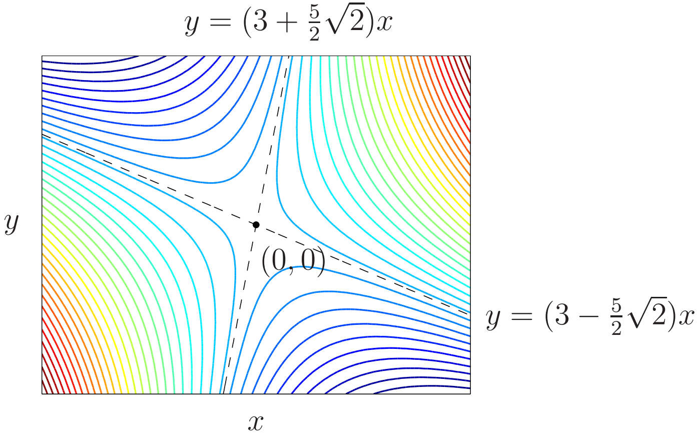
$$F = \int 6x - 2y\,dy = 6xy - y^2 + \varphi(x)$$

Einsetzen in $p = F_x \quad\Longrightarrow$

$$7x + 6y = 6y + \varphi'(x), \quad \varphi(x) = \frac{7}{2}x^2 + C$$

allgemeine Lösung

$$F(x,y) = \frac{7}{2}x^2 + 6xy - y^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x \pm \sqrt{-c + 25x^2/2}$$



Niveaulinien von F:

Hyperbeln mit Hauptachsenrichtungen $(2,1)^t$ und $(-1,2)^t$