# Eindeutigkeit der Lösung eines Differentialgleichungssystems

Ist $f(t,u)$ in einer Umgebung $[t_0-\delta, t_0+\delta] \times D$ von $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. $(u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$, d.h. gilt

$$|f(t,u) - f(t,\tilde{u})| \leq L|u - \tilde{u}|,$$

für $|t - t_0| \leq \delta$ und $u, \tilde{u} \in D$, dann ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

mit Werten in $D$ eindeutig.
In Verbindung mit dem Satz von Peano garantiert also die Lipschitz-Stetigkeit von $f$ die lokale Existenz einer eindeutigen Lösung auf einem Intervall $(t_0 - \delta_-, t_0 + \delta_+)$ mit $0 < \delta_\pm \leq \delta$.

# Beweis:

betrachte für zwei Lösungen $u$ und $\tilde{u}$ die Differenz

$$u'(t) - \tilde{u}'(t) = f(t, u(t)) - f(t, \tilde{u}(t))$$

Integration, Lipschitz-Bedingung für $|t - t_0| \leq \Delta = \min(\delta, 1/(2L)) \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |u(t) - \tilde{u}(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\, ds \right| \\ &\leq \underbrace{|t - t_0|}_{\leq 1/(2L)} L \underbrace{\max_{|s-t_0|\leq\Delta} |u(s) - \tilde{u}(s)|}_{=M} \end{aligned}$$

Bilden des Maximums der linken Seite über $t \in I = [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$
$\Longrightarrow \quad M \leq M/2$ und somit $M = 0$, d.h. $u = \tilde{u}$ auf $I$

Iteration des Arguments mit $t_0 \leftarrow t \pm \Delta \quad \Longrightarrow \quad$ Behauptung

# Beispiel:

(i) Lokale Existenz:

$$u' = tu^2, \quad u(0) = 1$$

bestimme eine Lipschitz-Konstante $L$ für $f(t, u) = tu^2$

$$f(t, u) - f(t, \tilde{u}) = t(u^2 - \tilde{u}^2) = [t(u + \tilde{u})]\,(u - \tilde{u})$$

$\Longrightarrow$ Abhängigkeit von $L$ von dem Betrag der Lösung
$\delta = 2,\ D = [0, 4]$, d.h. $(t, u), (t, \tilde{u}) \in [-2, 2] \times [0, 4] \quad \rightsquigarrow$

$$L = \max[\ldots] = 2 \cdot (2 \cdot 4) = 16$$

Die Lösung (bestimmt durch Separation der Variablen)

$$u(t) = \frac{1}{1 - t^2/2}$$

ist eindeutig; wird jedoch für $t = \sqrt{2}$ singulär, d.h. sie existiert nur auf einem Teilintervall von $[-2, 2]$.

(ii) Globale Existenz:

$$u' = \sin(tu), \quad u(0) = 1$$

Mittelwertsatz $\quad \Longrightarrow$

$$f(t,u) - f(t,\tilde{u}) = [\cos(s)\, t]\,(u - \tilde{u})$$

$\Longrightarrow \quad L = \max[\ldots] = T$ ist Lipschitz-Konstante auf dem Bereich $[-T, T] \times \mathbb{R}$

$|u'(t)| \leq 1 \quad \Longrightarrow$

$$|u(t)| \leq 1 + |t|$$

Satz von Peano (Existenz bis zum Rand des Stetigkeitsbereichs) $\quad \Longrightarrow$
Existenz im gesamten Interval $(-T, T)$

$T$ beliebig $\quad \rightsquigarrow \quad$ Existenz einer eindeutigen Lösung auf $\mathbb{R}$