Eigenlösungen eines linearen Differentialgleichungssystems

Ist v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ, dann ist

$$u(t) = \exp(\lambda t) v$$

eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$u' = Au\,.$$

Bei einem komplexen Eigenwert $\lambda = \sigma \pm \varrho \mathrm{i}$ sind für eine reelle Matrix Real- und Imaginärteil von u,

$$\exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)\,\mathrm{Re}\,v - \sin(\varrho t)\,\mathrm{Im}\,v), \quad \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)\,\mathrm{Im}\,v) + \sin(\varrho t)\,\mathrm{Re}\,v)\,,$$

Lösungen.

Falls eine Basis aus Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ existiert, d.h., falls A diagonalisierbar ist,

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad Q = (v_1, \ldots, v_n)\,,$$

dann lässt sich das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au + b(t)$$

entkoppeln. Mit $u = Qd$, $c = Q^{-1}b$ ist

$$d_k' = \lambda_k d_k + c_k(t), \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Diese skalaren linearen Differentialgleichungen können explizit gelöst werden:

$$d_k(t) = \exp(\lambda_k t)\left[\exp(-\lambda_k t_0) d_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k s) c_k(s)\, ds\right]\,.$$

Beweis:

(i) Eigenlösungen:
$Av = \lambda v \quad \Longrightarrow$

$$u(t) = \exp(\lambda t) v$$

löst die homogene Differentialgleichung, denn

$$u' = \lambda \exp(\lambda t)\, v, \;\; Au = \exp(\lambda t) \underbrace{Av}_{\lambda v}$$

komplexer Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$ und Eigenvektor $v = p + \mathrm{i}q \quad \rightsquigarrow$ Lösungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u(t) &= \operatorname{Re} \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t) + \mathrm{i} \sin(\varrho t))(p + \mathrm{i}q) \\ &= \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t) p - \sin(\varrho t) q) \\ \operatorname{Im} u(t) &= \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t) q + \sin(\varrho t) p) \end{aligned}$$

(ii) Diagonalisierung:
Substitution von $u = Qd$ im Differentialgleichungssystem $\quad\rightsquigarrow$

$$(Qd)' = A(Qd) + b$$

$(Qd)' = Qd'$, Multiplikation mit Q^{-1} $\quad\rightsquigarrow$

$$d' = \underbrace{Q^{-1}AQ}_{\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} d + c$$

k-te Komponente: skalare lineare Differentialgleichung $d_k' = \lambda_k d_k + c_k(t)$
Variation der Konstanten $\quad\rightsquigarrow\quad$ angegebene Lösungsdarstellung
Probe:

$$d_k' = \lambda_k \exp(\lambda_k t)[\ldots] + \exp(\lambda_k t)\exp(-\lambda_k t)c_k(t) \quad \checkmark$$

Beispiel:

lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{b(t)}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren A

$$\lambda_1 = 5,\ v_1 = (1,1)^{\mathrm{t}}, \quad \lambda_2 = 1,\ v_2 = (1,-1)^{\mathrm{t}}$$

Diagonalisierung $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ mit

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Substitution $d = Q^{\mathrm{t}} u \quad \rightsquigarrow$

$$d' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}}_{c(t)=Q^{\mathrm{t}} b(t)}, \quad d(0) = Q^{\mathrm{t}} u(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des entkoppelten Systems:

- $d_1' = 5d_1 + t/\sqrt{2}$, $d_1(0) = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} d_1(t) &= e^{5t}\left[\sqrt{2} + \int_0^t e^{-5s}\,\frac{s}{\sqrt{2}}\,ds\right] \\ &= e^{5t}\left[\sqrt{2} + \left[-e^{-5s}\,\frac{s}{5\sqrt{2}}\right]_0^t + \int_0^t e^{-5s}\,\frac{1}{5\sqrt{2}}\,ds\right] \\ &= e^{5t}\left[\sqrt{2} - \frac{e^{-5t}t}{5\sqrt{2}} - \frac{e^{-5t}}{25\sqrt{2}} + \frac{1}{25\sqrt{2}}\right] \\ &= \frac{51}{25\sqrt{2}}e^{5t} - \frac{5t+1}{25\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- $d_2' = d_2 - t/\sqrt{2}$, $d_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} d_2(t) &= e^{t}\left[0 + \int_0^t e^{-s}\left(-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\,ds\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-e^{t} + t + 1\right) \end{aligned}$$

Rücktransformation $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
u(t) &= Qd(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} d_1(t) + d_2(t) \\ d_1(t) - d_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 51\mathrm{e}^{5t} - 25\mathrm{e}^{t} + 20t + 24 \\ 51\mathrm{e}^{5t} + 25\mathrm{e}^{t} - 30t - 26 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{51}{50}\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_h} + \underbrace{\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10t + 12 \\ -15t - 13 \end{pmatrix}}_{u_p}
\end{aligned}$$

Probe:
$u(0) = (1,1)^{\mathrm{t}}$ $\checkmark$
u_h besteht aus Eigenlösungen $\checkmark$
u_p erfüllt die Differentialgleichung $u_p' = Au_p + (0,t)^{\mathrm{t}}$:

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10t + 12 \\ -15t - 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \checkmark$$