Differentiation und Laplace-Transformation

Für die Laplace-Transformation von Ableitungen gelten die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} u'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0)\,, \\ tu(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} -U'(s)\,. \end{aligned}$$

Für höhere Ableitungen gilt entsprechend

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)\,, \\ t^n u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)\,. \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformation der Stammfunktion

$$v(t) = \int_0^t u(r)\,dr$$

ist $V(s) = U(s)/s$.

Beweis:

(i) Differentiation:

$$u'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty u'(t)\mathrm{e}^{-ts}\,dt = \left[u(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty u(t)(-s)\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

$[\ldots]_0^\infty = -u(0) \quad \rightsquigarrow \quad$ behauptete Formel

(ii) Multiplikation:

$$tu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty u(t)t\mathrm{e}^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

mehrfache Anwendung der Formeln

$\rightsquigarrow$ Formeln für höhere Ableitungen und Potenzen

(iii) Integration:

$$v'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sV(s) - v(0) = sV(s)$$

$\rightsquigarrow$ behauptete Formel für V, da

$$v' = u, \quad u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$$

also $U(s) = sV(s)$