Differentialgleichungen

Das Handout ist Bestandteil der Vortragsfolien zur Höheren Mathematik; siehe die Hinweise auf der Internetseite vhm.mathematik.uni-stuttgart.de für Erläuterungen zur Nutzung und zum Copyright.

Differentialgleichung erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $y(x)$ hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

wobei das Argument x oft weggelassen wird ($y' = f(x, y)$).
Die Lösung ist im Allgemeinen nur bis auf eine Konstante bestimmt, die durch eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

festgelegt werden kann.

Beispiel:

Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x}(1 - y)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y = \frac{x}{x + c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ y nur bis auf eine Integrationskonstante c bestimmt

$\rightsquigarrow$ Konstante durch Anfangswert festgelegt

(vgl. Bilden von Stammfunktionen $f(x, y(x)) = g(x)$)

Anfangswert $y(1) = 2$ $\rightsquigarrow$

$$c = -\frac{1}{2}, \quad y(x) = \frac{2x}{2x - 1}$$

$x_0 = 0$ $\rightsquigarrow$ Singularität

einziger möglicher Anfangswert $y_0 = 0$, Lösungsschar nicht eingeschränkt

Beispiel:

Wachstumsmodell: proportionaler Zuwachs bzw. Abnahme

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \; p \; u(t)$$

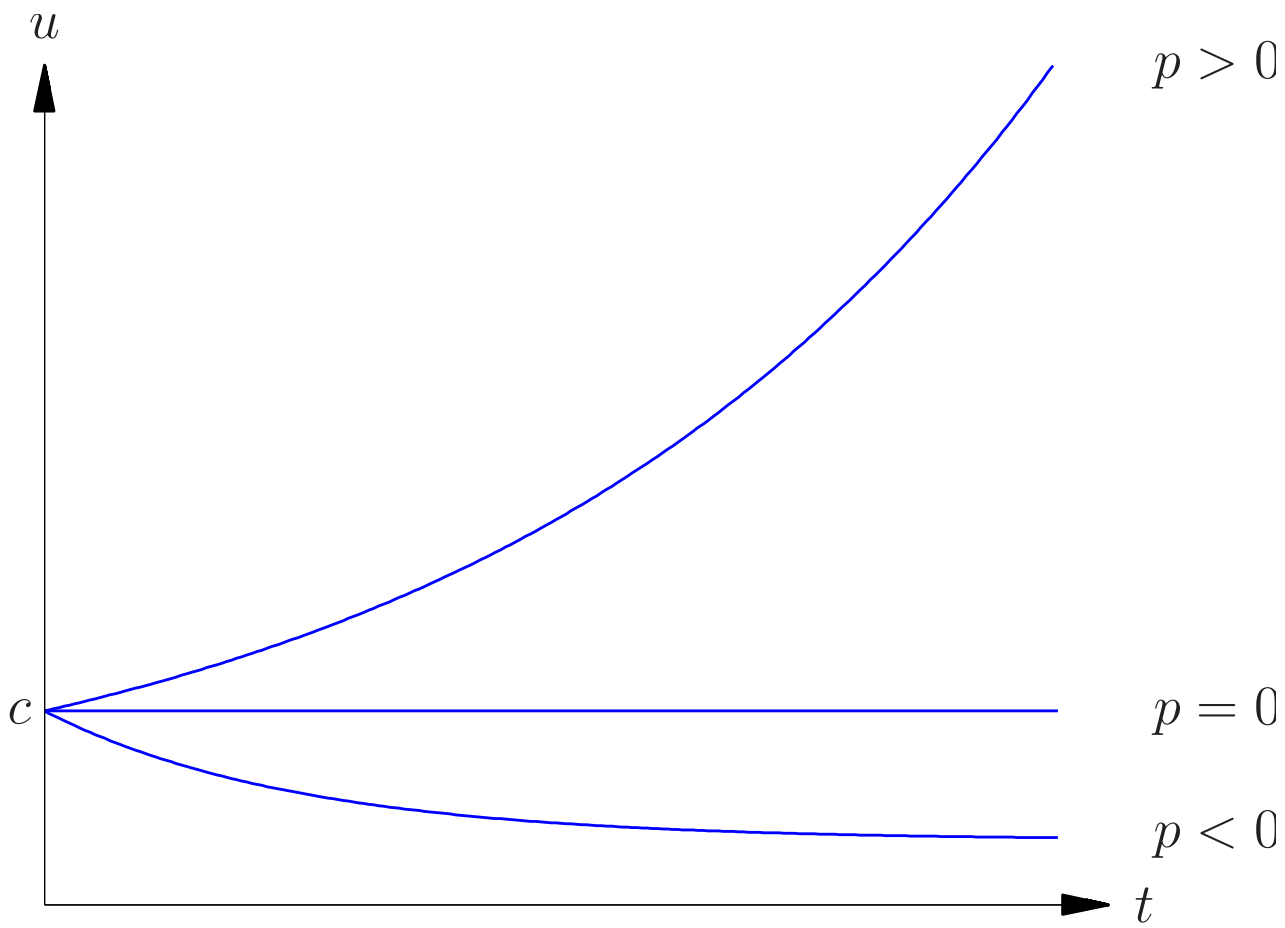
$\Delta t \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Differentialgleichung

$$u'(t) = pu(t)$$

(u' proportional zu u)
Lösung

$$u(t) = u(0) \exp(pt)$$

exponentielles Wachstum

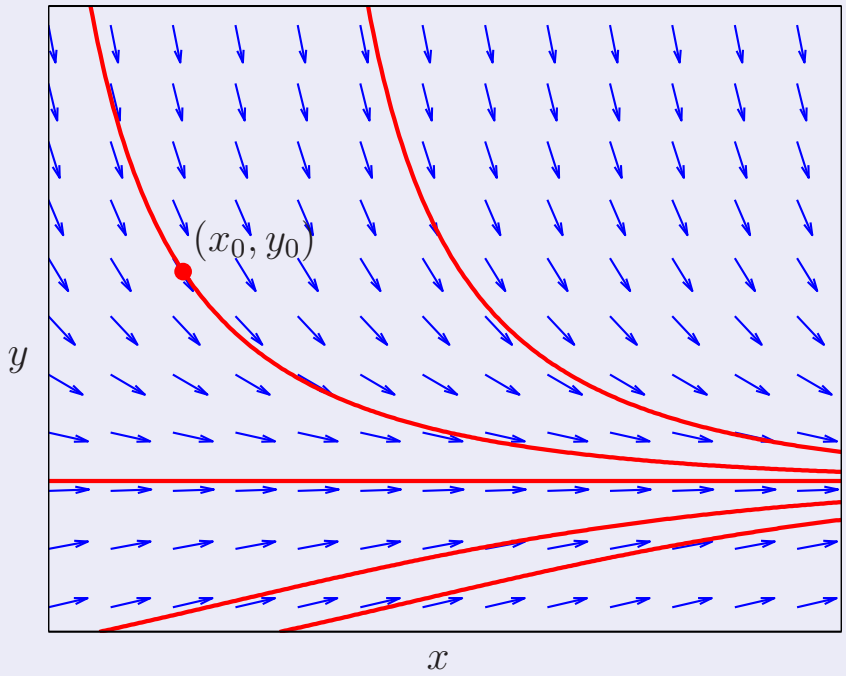

u
$p > 0$
c
$p = 0$
$p < 0$
t

Richtungsfeld

Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ordnet jedem Punkt der xy-Ebene eine Tangente mit Steigung f zu.



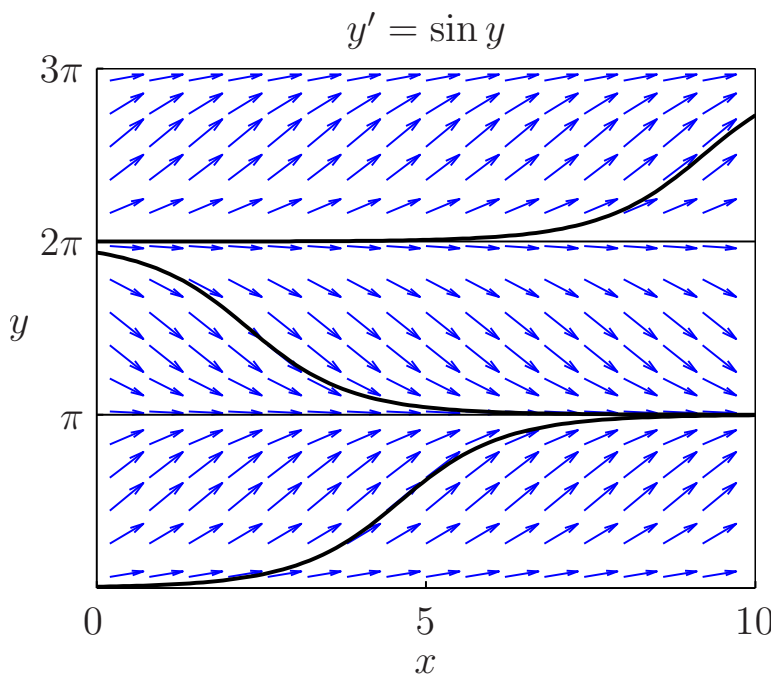
Die Graphen der Lösungen sind in jedem Punkt (x, y) zum Richtungsfeld tangential.
Ist eine Anfangsbedingung

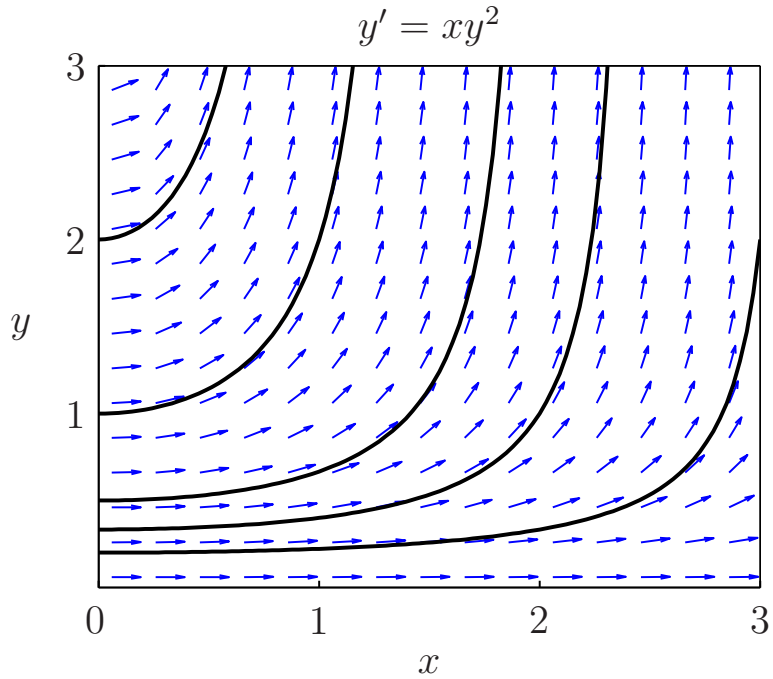
$$y(x_0) = y_0$$

gegeben, so verläuft der Graph durch den Punkt (x_0, y_0).

Beispiel:

Die Abbildung zeigt zwei Beispiele von Richtungsfeldern, in denen jeweils einige Lösungen eingezeichnet sind.





$\rightsquigarrow$ qualitatives Verhalten der Lösungen erkennbar

(i) Linke Differentialgleichung:
Rechte Seite hängt nicht explizit von x ab.
$\rightsquigarrow$ Lösungen sind translationsinvariant, d.h. ist $y(x)$ Lösung, so auch $y(x+c)$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Nullstellen des Sinus $\rightsquigarrow$ konstante Lösungen $y(x) = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$

- anziehend für $j = 2k+1$,
  d.h. für Lösungen y $y(0) \in (2k\pi, (2k+2)\pi)$ gilt

$$\lim_{x \to \infty} y(x) - (2k+1)\pi = 0$$

- abstoßend für $j = 2k$

(ii) Rechte Differentialgleichung:
Die Steigungen nehmen für große Werte von x und y deutlich zu.
$\rightsquigarrow$ stark wachsende Lösungen
Für $y(0) > 0$ existiert jede Lösung nur auf einem endlichen Intervall.

Lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Form

$$y' = py + q$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y = y_p + y_h\,.$$

Dabei ist y_p eine partikuläre (oder spezielle) Lösung und y_h die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ($q(x) = 0$).

Bezeichnet

$$P(x) = \int p(x)\,dx$$

eine Stammfunktion von p, so gilt

$$y_h = c\exp(P(x))\,,$$

mit einer beliebig wählbaren Konstanten $c \in \mathbb{R}$, und

$$y_p = \int_{x_0}^{x} \exp(P(x) - P(s))q(s)\,ds$$

ist eine partikuläre Lösung mit $y_p(x_0) = 0$.
Für die allgemeine Lösung $y = y_p + y_h$ zu der Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ ist

$$c = y_0 \exp(-P(x_0))\,.$$

Beweis:

Ist y_h eine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$y_h' = p y_h$$

und P eine Stammfunktion von p, so gilt

$$[y_h \exp(-P)]' = y_h' \exp(-P) - y_h p \exp(-P) = 0\,.$$

$\Longrightarrow$ $[\cdots] = c$ mit einer Konstanten c, also $y_h = c \exp(P)$ wie behauptet

Ansatz für eine partikuläre Lösung

$$y_p = C(x) \exp(P(x))$$

(Variation der Konstanten)

Einsetzen von y_p in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$C' \exp(P) + Cp \exp(P) = pC \exp(P) + q$$

$\rightsquigarrow$

$$C' = q \exp(-P)$$

und damit

$$y_p(x) = \left(\int_{x_0}^{x} \exp(-P(s)) q(s)\, ds \right) \exp(P(x))$$

Beispiel:

Es soll die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{p} y + \underbrace{x^3}_{q}$$

sowie die Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = 4$ bestimmt werden.

Stammfunktion von p

$$P(x) = \ln(1+x^2)$$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $y' = py$

$$y_h(x) = ce^{P(x)} = c(1+x^2)$$

partikuläre Lösung:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int_0^x e^{\ln(1+x^2)-\ln(1+s^2)} s^3 \, ds \\ &= (1+x^2)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) \end{aligned}$$

allgemeine Lösung

$$y = y_p + y_h = (1+x^2)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + c\right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$

Anfangswert $y(0) = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 4$

Bernoullische Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$u' + pu = qu^k, \quad k \neq 0, 1\,,$$

lässt sich durch die Substitution

$$y = u^{1-k}, \quad y' = (1-k)u^{-k}u'$$

in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-k}\,y' = -py + q$$

überführen.

Speziell erhält man für konstantes p und q

$$y = \frac{q}{p} + c\exp(p(k-1)x)$$

bzw.

$$u = \left(\frac{q}{p} + c\exp(p(k-1)x)\right)^{\frac{1}{1-k}}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Es soll die Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$u' + 3u = xu^2, \;\; u(0) = 1\,,$$

bestimmt werden.
Substitution $y = 1/u$ bzw. $u = 1/y$ $\quad \rightsquigarrow$

$$-y^{-2}y' + 3y^{-1} = xy^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = 3y - x$$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung

$$y = \int_0^x e^{3x-3s}(-s)ds + ce^{3x}$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1/u(0) = 1$ und Integration $\quad \Longrightarrow \quad c = 1$
und

$$y = \frac{8}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{9}{8e^{3x} + 3x + 1}$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

Für einen konstanten Koeffizienten p kann die Differentialgleichung

$$y' = py + q$$

für bestimmte Funktionen $q(x)$ durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten gelöst werden oder eine partikuläre Lösung y_p ist unmittelbar ersichtlich.

Einige gebräuchliche Fälle sind

- $q(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j \to y_p = \sum_{j=0}^{n} d_j x^j$ für $p \neq 0$
- $q(x) = c\exp(\lambda x)$, $\lambda \neq p \to y_p = \dfrac{c}{\lambda - p}\exp(\lambda x)$
- $q(x) = c\exp(px) \to y_p = cx\exp(px)$
- $q(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) \to y_p = c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = y_p + c\exp(px)\,.$$

Beweis:

- Polynom q:
  Ableitung des Ansatzes und Indexverschiebung $\rightsquigarrow$

$$y_p' = \sum_{j=1}^{n} d_j j x^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) d_{j+1} x^j$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1) d_{j+1} x^j = p \underbrace{\sum_{j=0}^{n} d_j x^j}_{y_p} + \sum_{j=0}^{n} c_j x^j$$

  Koeffizientenvergleich $\rightsquigarrow$

$$d_n = -\frac{c_n}{p}\ ,\ d_j = \frac{-c_j}{p} + \frac{(j+1)d_{j+1}}{p},\ j = n-1, \ldots, 0$$

- Exponentialfunktionen q:
  $\rightsquigarrow$ direktes Nachrechnen

- Trigonometrischer Ausdruck:
  Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$-c\omega\sin(\omega x) + d\omega\cos(\omega x) =$$
$$p(c\cos(\omega x) + d\sin(\omega x)) + a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$$

Vergleich der Koeffizienten von $\cos(\omega x)$ und $\sin(\omega x)$
$\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem für c und d:

$$a = -pc + \omega d, \quad b = -\omega c - pd$$

(Determinante der Koeffizientenmatrix ungleich null)

Beispiel:

Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung mit Reibung gilt für die Geschwindigkeit $v(t)$

$$mv' = -\alpha v - \gamma m, \quad v(0) = v_0 \ .$$

allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$v_h = c \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

mit $c \in \mathbb{R}$
partikuläre Lösung

$$v_p = -\frac{\gamma m}{\alpha}$$

Anfangsbedingung $v(0) = v_0 \quad \rightsquigarrow \quad c = v_0 + \gamma m/\alpha$ und

$$v(t) = v_p(t) + v_h(t) = -\frac{\gamma m}{\alpha} + \left(v_0 + \frac{\gamma m}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{m} t\right)$$

Separable Differentialgleichung

Eine separable Differentialgleichung

$$y' = p(x)g(y)\,,$$

lässt sich durch Trennung der Variablen und separates Bilden von Stammfunktionen lösen:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int p(x)\,dx\,.$$

Die Integrationskonstante kann dabei durch eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

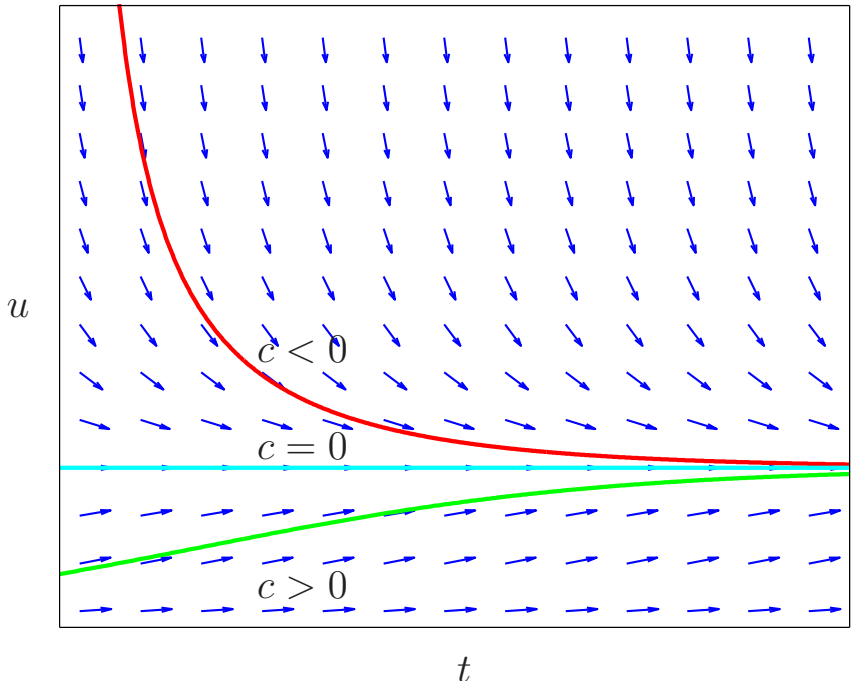
festgelegt werden.

Beispiel:

Die Differentialgleichung

$$u' = p(1-u)u, \quad p > 0\,,$$

modelliert ein Wachstum, das bei zunehmender Dichte ($u(t) \nearrow 1$) abnimmt (logistisches Modell).



Die Abbildung zeigt das Richtungsfeld für $p = 1$ sowie einige der Lösungen

$$u = \frac{e^{pt}}{c + e^{pt}} .$$

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int p \, dt$$

Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{u(1-u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-1}$$

$\rightsquigarrow$

$$\ln \left| \frac{u}{u-1} \right| = pt + c' \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u}{u-1} = \pm e^{pt+c'}$$

mit einer Integrationskonstante $c' \in \mathbb{R}$
Auflösen nach u $\rightsquigarrow$ behauptete Formel für u mit $c = \mp e^{-c'}$

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Eine Differentialgleichung

$$y' = f(y/x)\,,$$

bei der die rechte Seite nur vom Quotienten y/x abhängt, lässt sich durch die Substitution

$$xz(x) = y(x), \quad z + xz' = f(z)$$

in die separable Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

überführen.

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{yx}, \quad y(1) = 2$$

Kürzen durch x^2 $\rightsquigarrow$ rechte Seite in homogener Form

$$\frac{y^2/x^2 + 1}{y/x} = f(y/x)$$

Substitution $xz = y$ $\rightsquigarrow$

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x}\left(\frac{z^2 + 1}{z} - z\right) = \frac{1}{xz}$$

Separation der Variablen

$$zz' = \frac{1}{x}$$

Integration

$$\frac{1}{2}z^2 = \ln|x| + c$$

Berücksichtigung des Anfangswertes $y(1) = z(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad c = 2$ und

$$y = xz = x\sqrt{2\ln|x| + 4}$$

($z = -\sqrt{\ldots}$ entspricht nicht dem vorgegebenen Anfangswert.)

Exakte Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form

$$q(x,y)y' + p(x,y) = 0$$

heißt exakt, wenn eine Stammfunktion F existiert mit

$$p = F_x,\ q = F_y \quad \Leftrightarrow \quad (p,q)^{\mathrm{t}} = \operatorname{grad} F\,.$$

Die Lösungen lassen sich dann implizit als Niveaulinien darstellen,

$$F(x,y) = c\,,$$

wobei die Konstante c durch eine Anfangsbedingung festgelegt werden kann.

Man schreibt eine exakte Differentialgleichung oft auch in der Form

$$p dx + q dy = 0\,,$$

um die symmetrische Behandlung der Variablen x und y hervorzuheben. In Anlehnung an die Theorie der Arbeitsintegrale ist bei stetig differenzierbaren Funktionen p und q die Integrabilitätsbedingung

$$p_y = q_x$$

notwendig für die Existenz von F. Sie ist hinreichend, falls das betrachtete Definitionsgebiet einfach zusammenhängend ist.

Beweis:

Existenz der Stammfunktion, Kettenregel $\Longrightarrow$

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x)) = F_x(x,y(x)) + F_y(x,y(x))y'(x)\,,$$

d.h. die Niveaulinien entsprechen Lösungen:

$$F = c \quad \Longrightarrow \quad p + qy' = 0$$

Vertauschbarkeit partieller Ableitungen $\Longrightarrow$

$$p_y = F_{xy} = F_{yx} = q_x\,,$$

d.h. die Notwendigkeit der Integrabilitätsbedingung

Für ein einfach zusammenhängendes Parametergebiet ist eine Stammfunktion F als Arbeitsintegral darstellbar:

$$F(x,y) = \int_C p\,dx + q\,dy, \quad C : (x_0,y_0) \to (x,y)$$

mit einem Weg C, der einen fest gewählten Punkt (x_0,y_0) mit (x,y) verbindet

Die Wegunabhängigkeit ist durch die Integrabilitätsbedingung garantiert.

Parametrisierung

$$C : [a,b] \ni t \mapsto (u(t),v(t))$$

$\rightsquigarrow$ explizite Form für F:

$$F(x,y) = \int_a^b p(u(t),v(t))u'(t) + q(u(t),v(t))v'(t)\,dt$$

Beispiel:

exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{(6x - 2y)}_{q}\, y' + \underbrace{7x + 6y}_{p} = 0$$

prüfe die Integrabilitätsbedingung:

$$q_x = 6 = p_y \quad \checkmark$$

p und q auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert $\quad \Longrightarrow \quad$ Existenz einer Stammfunktion
Konstruktion durch achsenparallele Integration
$q = F_y \implies$

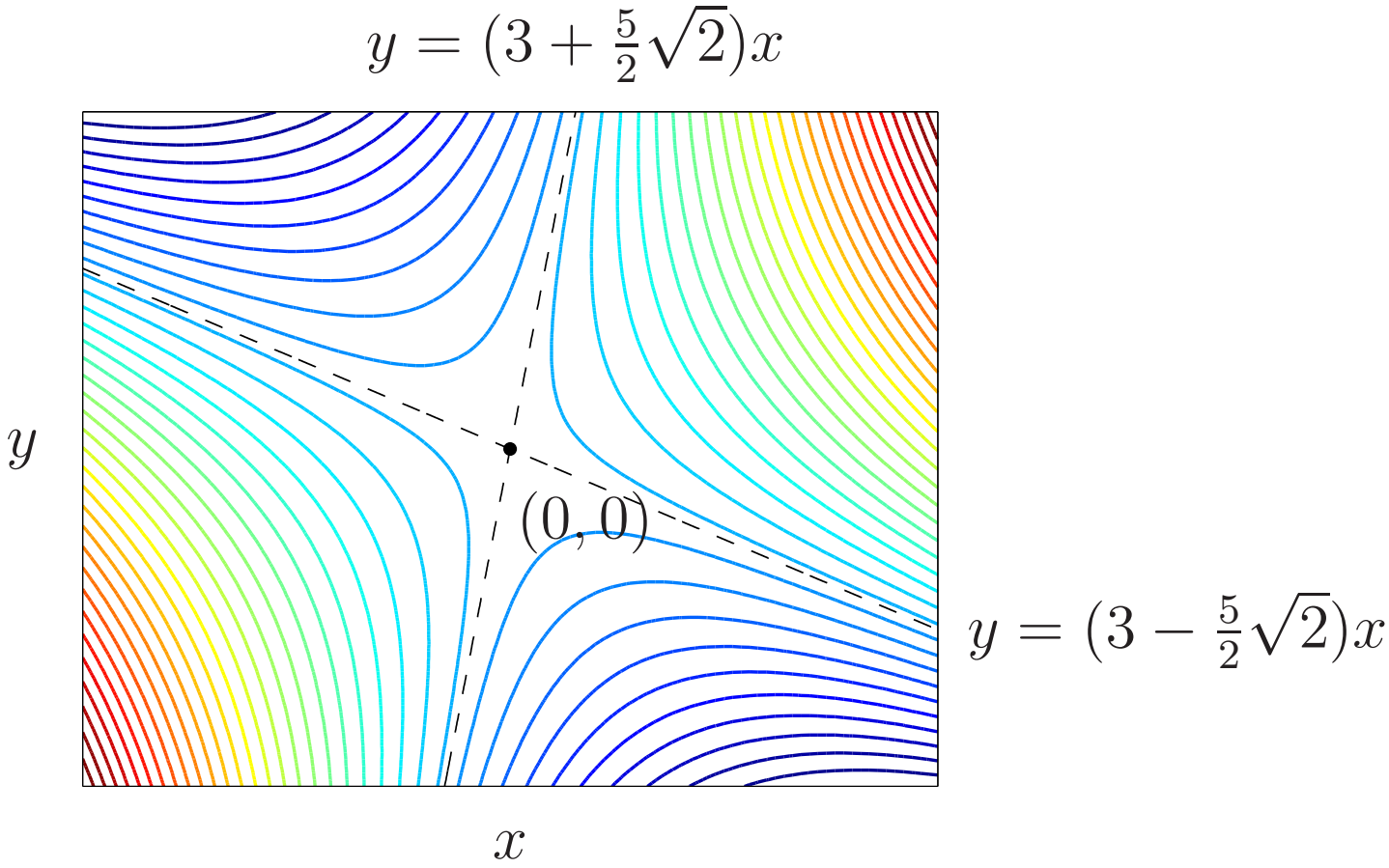
$$F = \int 6x - 2y \, dy = 6xy - y^2 + \varphi(x)$$

Einsetzen in $p = F_x \quad \Longrightarrow$

$$7x + 6y = 6y + \varphi'(x), \quad \varphi(x) = \frac{7}{2}x^2 + C$$

allgemeine Lösung

$$F(x,y) = \frac{7}{2}x^2 + 6xy - y^2 = c \quad \Leftrightarrow \quad y = 3x \pm \sqrt{-c + 25x^2/2}$$



Niveaulinien von F:
Hyperbeln mit Hauptachsenrichtungen $(2,1)^t$ und $(-1,2)^t$

Integrierender Faktor

Wird eine Differentialgleichung

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$$

durch Multiplikation mit einer Funktion $a(x,y)$ exakt, d.h. ist

$$(ap)_y = (aq)_x\,,$$

so bezeichnet man a als integrierenden Faktor.

Beispiel:

$$\underbrace{y}_{p} + \underbrace{x(2xy-1)}_{q}\, y' = 0$$

nicht exakt, denn $p_y = 1 \neq 4xy - 1 = q_x$
Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $1/x^2$
$\rightsquigarrow$ exakte Differentialgleichung

$$\underbrace{y/x^2}_{\tilde{p}} + \underbrace{(2y - 1/x)}_{\tilde{q}}\, y' = 0, \quad \tilde{p}_y = 1/x^2 = \tilde{q}_x$$

Implizite Darstellung der Lösung

$$F(x, y) = y^2 - y/x = c$$

Bestätigung durch Überprüfung der Identität

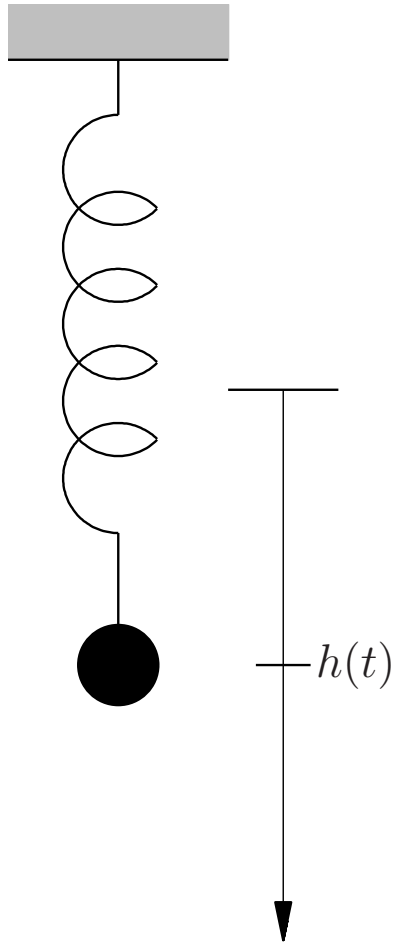
$$\operatorname{grad} F = (y/x^2,\, 2y - 1/x)^{\mathrm{t}} \stackrel{!}{=} (\tilde{p},\, \tilde{q})^{\mathrm{t}} \quad \checkmark$$

Beispiel:

Die Differentialgleichung

$$h'' = -\omega^2 h + f$$

beschreibt die Auslenkung einer Feder unter einer Kraft f.



allgemeine Lösung für $f(t) = -g$

$$h(t) = c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega^2} g$$

Bestimmung der Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen
z.B.: $h(0) = 0$, $h'(0) = g \quad \Longrightarrow$

$$h(t) = \frac{g}{\omega^2}(\omega \sin(\omega t) + \cos(\omega t) - 1)$$

Linearer Oszillator

Die Auslenkung $u(t)$ eines linearen Oszillators bei periodischer Anregung wird durch die Differentialgleichung

$$u'' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t), \quad \omega_0 > 0\,,$$

beschrieben.
Die allgemeine Lösung setzt sich aus einer freien und einer erzwungenen Schwingung zusammen, $u = u_h + u_p$, wobei

$$u_h(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

und

$$u_p(t) = \frac{c}{\omega^2 - \omega_0^2}\left(\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)\right), \quad \omega \neq \omega_0\,,$$

sowie

$$u_p(t) = \frac{c}{2\omega}\, t \sin(\omega t)$$

im Resonanzfall $\omega = \omega_0$.
Die Konstanten a, b können durch Anfangsbedingungen festgelegt werden:

$$a = u(0), \quad b = u'(0)/\omega_0\,.$$

Beweis:

$\cos(\omega_0 t)$, $\sin(\omega_0 t)$ erfüllen die homogene Differentialgleichung

$$u'' + \omega_0^2 u = 0\,.$$

Linearkombination $\rightsquigarrow$ Lösung u_h der Differentialgleichung mit $c = 0$

Direktes Nachrechnen $\rightsquigarrow$ Lösung u_p der Differentialgleichung

- $\omega \neq \omega_0$:

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos(\omega t) + \omega_0^2 \cos(\omega t) = (\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t)$$

Multiplikation mit $c/(w_0^2 - w^2)$ $\rightsquigarrow$ rechte Seite $c\cos(\omega t)$
addiere $(c/(\omega^2 - \omega_0^2))\cos(\omega_0 t)$
$\rightsquigarrow$ partikuläre Lösung mit doppelter Nullstelle bei $t = 0$:

$$u_p = c\,\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

- $\omega = \omega_0$:
  Grenzübergang $\omega_0 \to \omega$ $\rightsquigarrow$

$$\lim_{\omega_0 \to \omega} c\,\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{\omega_0 \to \omega} c\,\frac{-t\sin(\omega_0 t)}{-2\omega_0}$$

  (Differentiation nach ω_0)

doppelte Nullstelle der partikulären Lösungen bei $t = 0$

$\Longrightarrow$ Bestimmung von a und b aus den Anfgangswerten von u_h

Beispiel:

Für die Differentialgleichung

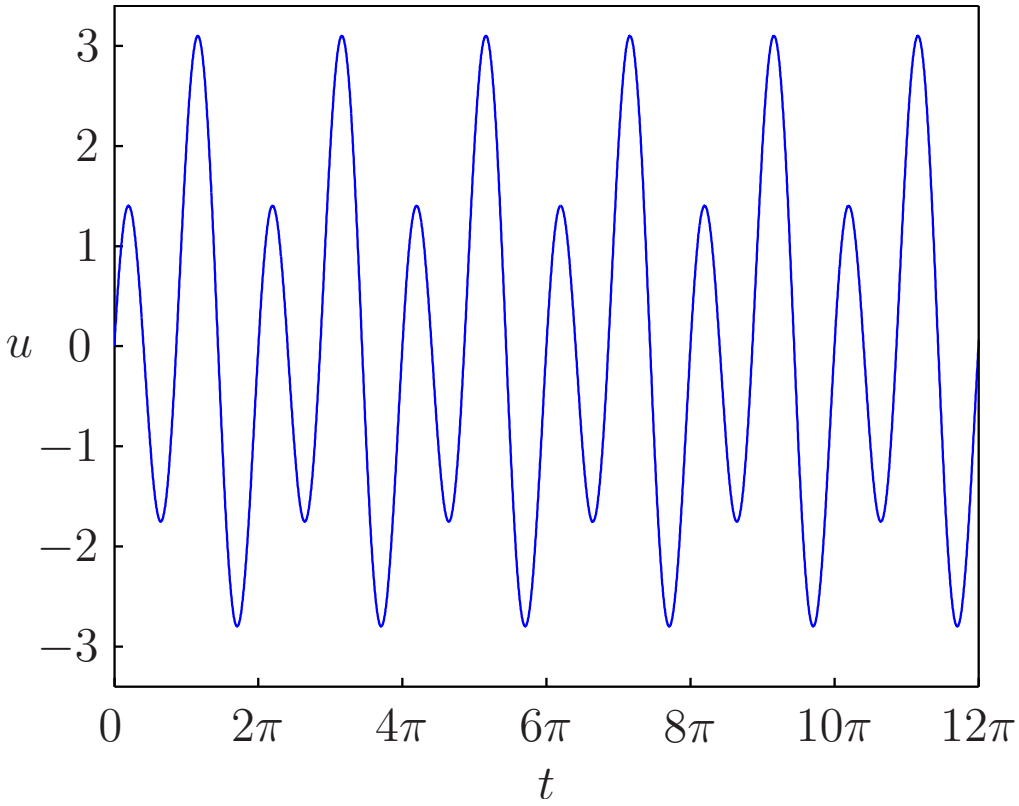
$$u'' + 4u = 3\cos t$$

ist $\omega_0 = 2$, $\omega = 1$ und $c = 3$.

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} u(t) &= \underbrace{a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)}_{u_h} + \underbrace{c\,\frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}}_{u_p} \\ &= a\cos(2t) + b\sin(2t) + \frac{3}{1-4}\left(\cos(2t) - \cos t\right) \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$



Anfangswerte

$$u(0) = 0, u'(0) = 2$$

$\rightsquigarrow$ abgebildete (2π)-periodische Lösung

$$u(t) = \sin(2t) - \cos(2t) + \cos t$$

mit $a = u(0) = 0$ und $b = u'(0)/\omega_0 = 2/2 = 1$

Beispiel:

Für die Differentialgleichung

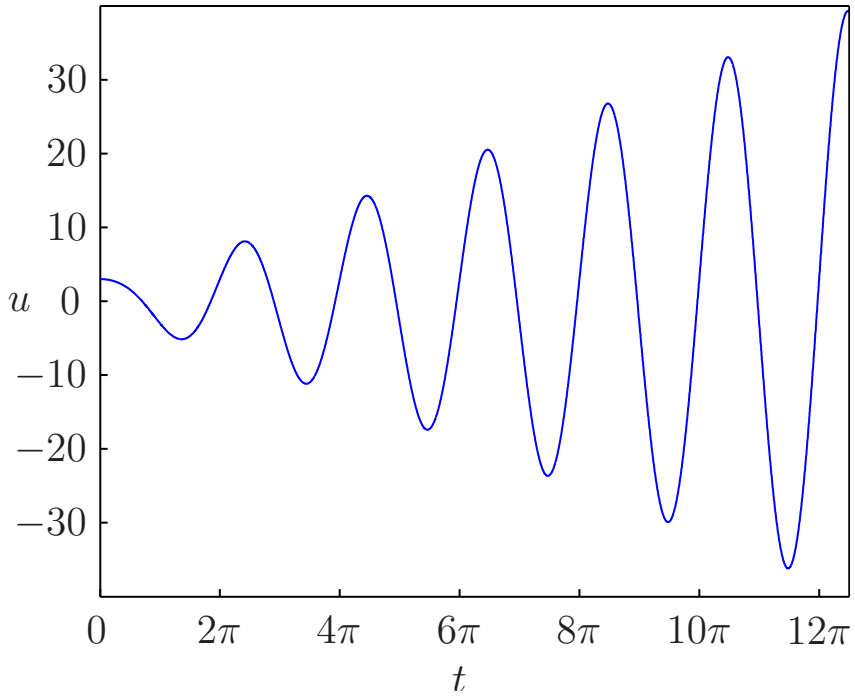
$$u'' + u = 2\cos t$$

ist $\omega_0 = \omega = 1$ (Resonanz), $c = 2$.

allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} u &= \underbrace{a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}_{u_h} + \underbrace{\frac{c}{2\omega}\, t\sin t}_{u_p} \\ &= a\cos t + b\sin t + t\sin t \end{aligned}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$



Anfangswerte

$$u(0) = 3, u'(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ abgebildete Lösung

$$u(t) = 3\cos t + t \sin t$$

mit $a = u(0) = 3$ und $b = u'(0)/\omega = 0$

Resonanz $\rightsquigarrow$ lineares Wachstum

Homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die Lösung der Differentialgleichung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ hat je nach Typ der Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^2 + p\lambda + q$$

folgende Form:

- zwei reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$u(t) = a\exp(\lambda_1 t) + b\exp(\lambda_2 t)$$

- eine doppelte Nullstelle λ:

$$u(t) = a\exp(\lambda t) + bt\exp(\lambda t)$$

- zwei komplex konjugierte Nullstellen $-p/2 \pm \varrho\mathrm{i}$:

$$u(t) = \exp\left(-\frac{pt}{2}\right)(a\cos(\varrho t) + b\sin(\varrho t))$$

Die Konstanten a, b können durch Anfangsbedingungen festgelegt werden.

Beweis:

Einsetzen des Ansatzes $u(t) = \exp(\lambda t)$ in die Differentialgleichung

$$\lambda^2 \exp(\lambda t) + p\lambda \exp(\lambda t) + q \exp(\lambda t) = 0$$

$\Longrightarrow$ charakteristisches Polynom $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

(i) zwei verschiedene Nullstellen λ_j:
linear unabhängige Lösungen

$$\exp(\lambda_j t), \quad j = 1, 2$$

für $\lambda = -p/2 \pm \varrho \mathrm{i}$, reelle Lösungen durch Bilden von Linearkombinationen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(\exp((-p/2 + \varrho\mathrm{i})t) + \exp((-p/2 - \varrho\mathrm{i})t)\right) &= \exp(-pt/2)\cos(\varrho t) \\ \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\exp((-p/2 + \varrho\mathrm{i})t) - \exp((-p/2 - \varrho\mathrm{i})t)\right) &= \exp(-pt/2)\sin(\varrho t) \end{aligned}$$

(ii) doppelte Nullstelle λ:

$$2\lambda + p = 0 \qquad \text{(charakteristisches Polynom ableiten)}$$

$\rightsquigarrow$ zweite, linear unabhängige Lösung $t\exp(\lambda t)$:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 (t\exp(\lambda t)) + p\frac{d}{dt}(t\exp(\lambda t)) + qt\exp(\lambda t)$$
$$= [2\lambda\exp(\lambda t) + \lambda^2 t\exp(\lambda t)] + [p\exp(\lambda t) + p\lambda t\exp(\lambda t)] + [qt\exp(\lambda t)]$$
$$= \left((2\lambda + p) + (\lambda^2 + p\lambda + q)t\right)\exp(\lambda t) = 0$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 2u' - 8u = 0, \qquad u(0) = 2,\ u'(0) = 2$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8$$

mit den Nullstellen

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$a\exp(-2t) + b\exp(4t)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccc} 2 & = & u(0) & = & a+b \\ 2 & = & u'(0) & = & -2a+4b \end{array}$$

$\Longrightarrow$ $a = b = 1$, d.h.

$$u(t) = \exp(-2t) + \exp(4t)$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 2u' + u = 0, \qquad u(0) = 1,\ u'(0) = 0$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1$$

mit der doppelten Nullstelle

$$\lambda_{1,2} = 1$$

allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(a + bt)\ \exp(t)$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u(0) = 1 &= a \\ u'(0) = 0 &= a + b \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $a = 1$, $b = -1$, d.h.

$$u(t) = (1 - t)\,\exp(t)$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Für bestimmte rechte Seiten f kann eine partikuläre Lösung u der Differentialgleichung

$$u''(t) + pu'(t) + qu(t) = f(t)$$

durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten bestimmt werden. Einige gebräuchliche Fälle sind

- Polynome:

$$f(t) = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j \to u(t) = \sum_{j=0}^{n} u_j t^j\,, \quad \text{falls } q \neq 0\,.$$

  Falls $q = 0$, muss u mit t multipliziert werden. Ist zusätzlich $p = 0$, so ist eine weitere Multiplikation mit t erforderlich.

- Exponentialfunktionen:

$$f(t) = \exp(\lambda t) \to u(t) = c \exp(\lambda t)\,,$$

falls $\lambda^2 + p\lambda + q \neq 0$.
Ist λ eine einfache (doppelte) Nullstelle des charakteristischen Polynoms, muss c durch ct (ct^2) ersetzt werden.

- Trigonometrische Funktionen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \exp(\alpha t)(c_1 \sin(\omega t) + c_2 \cos(\omega t)) \\ \to u(t) &= \exp(\alpha t)(a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Sind $\alpha \pm \mathrm{i}\omega$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms, muss u mit t multipliziert werden.

Treten gemischte Terme auf, so ist die Superposition der entsprechenden Ansätze möglich.

Beispiel:

Differentialgleichung

$$u'' - 3u' - 4u = t + \exp(2t) + \cos(3t)$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$
keine Sonderfälle, da $\lambda_k \neq 0, 2, \pm 3\mathrm{i}$
$\rightsquigarrow$ Standardansatz

$$u(t) = [a + bt] + [c\exp(2t)] + [e\cos(3t) + f\sin(3t)]$$

Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
u'' - 3u' - 4u = & \\
& [-3b - 4a - 4bt] + [(4c - 6c - 4c)\exp(2t)] \\
& \quad + [(-9e - 9f - 4e)\cos(3t) + (-9f + 9e - 4f)\sin(3t)] = \\
& [-3b - 4a - 4bt] + [-6c\exp(2t)] \\
& \quad + [(-13e - 9f)\cos(3t) + (9e - 13f)\sin(3t)]
\end{aligned}
$$

Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite $t + \exp(2t) + \cos(3t)$ $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
-4a - 3b &= 0 \\
-4b &= 1 \\
-6c &= 1 \\
-13e - 9f &= 1 \\
9e - 13f &= 0
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow \quad b = -1/4,\ a = 3/16,\ c = -1/6,\ e = -13/250,\ f = -9/250$

partikuläre Lösung

$$u_p(t) = \frac{3}{16} - \frac{1}{4}t - \frac{1}{6}\exp(2t) - \frac{13}{250}\cos(3t) - \frac{9}{250}\sin(3t)$$

Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_h(t) = \alpha \exp(-t) + \beta \exp(4t)$$

allgemeine Lösung $u = u_p + u_h$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 2u' + u = \exp(t), \qquad u(0) = 0,\ u'(0) = 3$$

$\rightsquigarrow$ charakteristisches Polynom

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda = 1$
Sonderfall $\rightsquigarrow$ Ansatz

$$u(t) = (a + bt + ct^2)\exp(t)$$

Einbeziehung der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung durch die Koeffizienten a und b

Anfangsbedingungen $\rightsquigarrow$

$$u(0) = 0 = a, \quad u'(0) = 3 = a + b\,,$$

d.h. $a = 0$, $b = 3$ und $u(t) = (3t + ct^2)\exp(t)$
Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \exp(t) &= \big([2c + 2(3 + 2ct) + (3t + ct^2)] \\ &\qquad -2[(3 + 2ct) + (3t + ct^2)] + [3t + ct^2]\big)\exp(t) \\ &= 2c\exp(t) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $c = 1/2$, d.h.

$$u(t) = (3t + t^2/2)\exp(t)$$

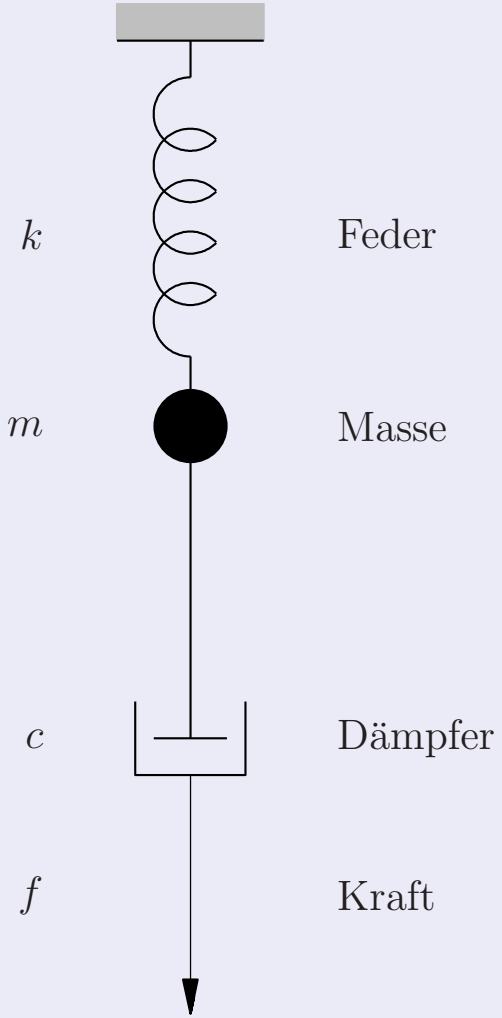
löst das Anfangswertproblem

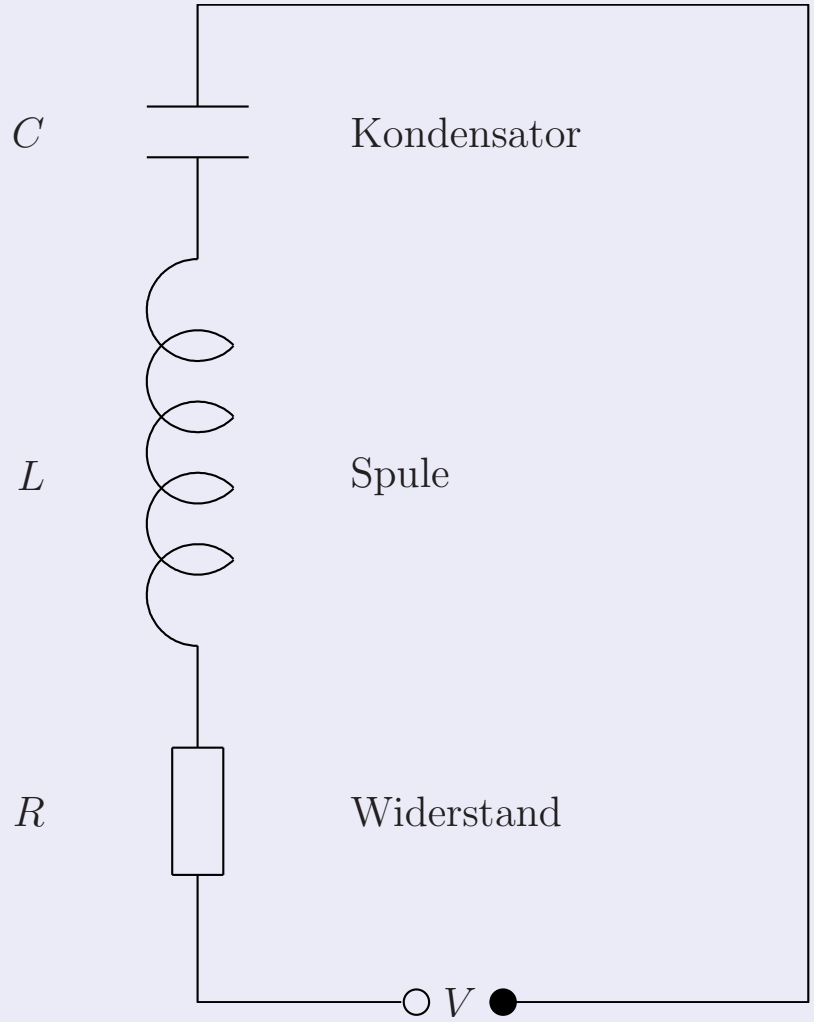
Gedämpfte harmonische Schwingung

Die Differentialgleichung

$$u'' + 2ru' + \omega_0^2 u = c\cos(\omega t)$$

mit $r > 0$ modelliert sowohl eine elastische Feder als auch einen elektrischen Schwingkreis.





$$2r = \frac{c}{m}\ ,\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$2r = \frac{R}{L}\ ,\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Je nach Typ der Lösungen u_h der homogenen Differentialgleichung ($c = 0$) unterscheidet man

- starke Dämpfung ($r > \omega_0$):

$$u_h = a \exp(\lambda_1 t) + b \exp(\lambda_2 t)$$

mit $\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega_0^2}$

- kritische Dämpfung ($r = \omega_0$):

$$u_h = (a + bt) \exp(-rt)$$

- schwache Dämpfung ($r < \omega_0$):

$$u_h = \exp(-rt) \left(a \cos(\lambda t) + b \sin(\lambda t)\right)$$

mit $\lambda = \sqrt{\omega_0^2 - r^2}$.

Eine partikuläre Lösung ist

$$u_p(t) = c' \cos(\omega t + \delta)$$

mit der Amplitude

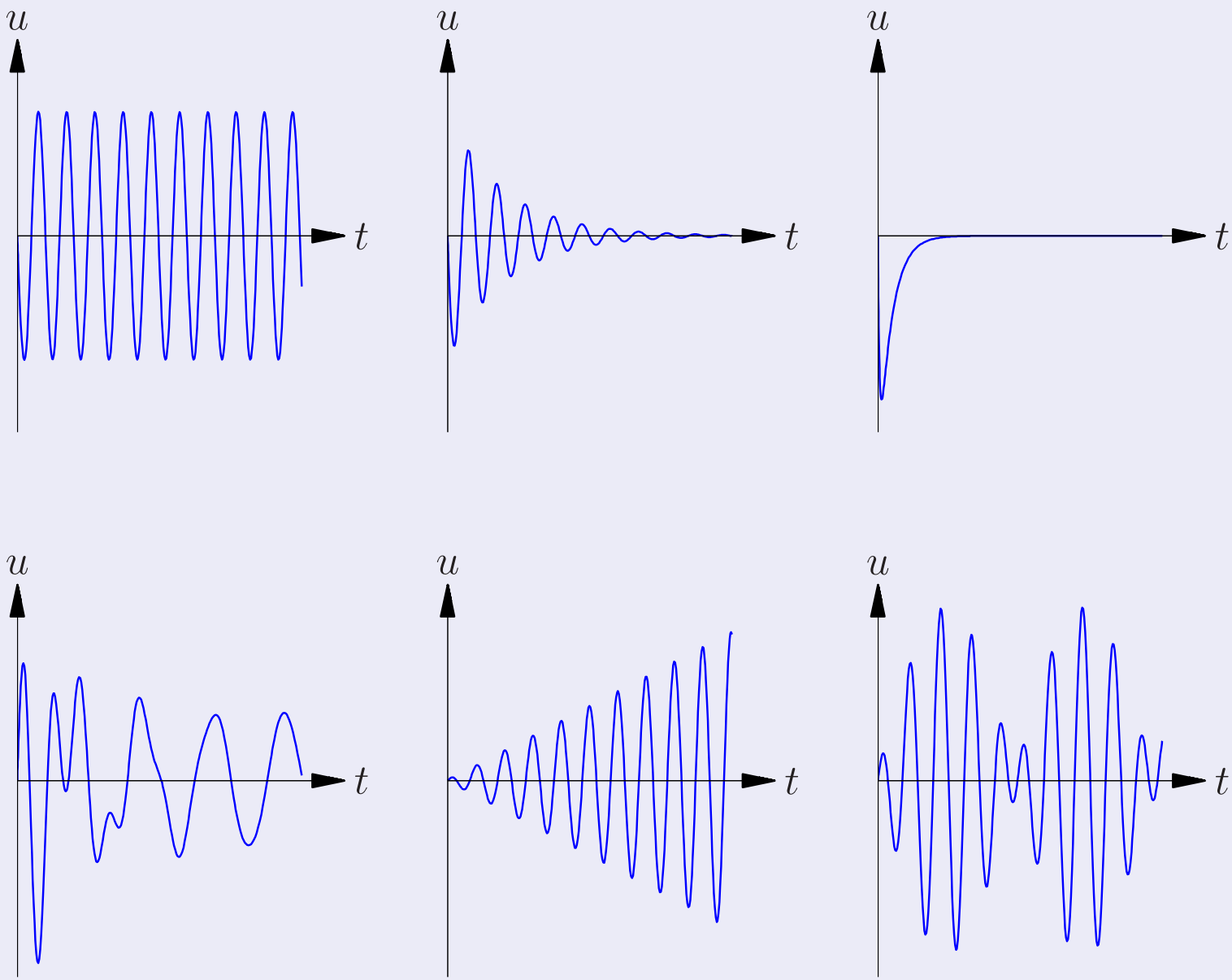
$$c' = c/\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}$$

und der Phase

$$\delta = \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}2r\omega)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung erhält man durch Addition von u_h:

$$u = u_p + u_h\,.$$



Das qualitative Verhalten von Lösungen kann sehr unterschiedlich sein.

Beweis:

(i) Lösung der homogenen Differentialgleichung:
Der Typ der Lösungen ist durch das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2r\lambda + \omega_0^2$ bestimmt.

(ii) Partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung:
Einsetzen von

$$u_p = \mathrm{Re}\left(c' \exp(\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\delta)\right)$$

$\rightsquigarrow$

$$\mathrm{Re}\left(c' \exp(\mathrm{i}\delta)(-\omega^2 + 2r\omega\mathrm{i} + \omega_0^2) \exp(\mathrm{i}\omega t)\right) = c\cos(\omega t)$$

$\cos(\omega t) = \mathrm{Re}\exp(\mathrm{i}\omega t) \implies$

$$\omega_0^2 - \omega^2 + 2r\omega\mathrm{i} = \frac{c}{c'}\exp(-\mathrm{i}\delta)\,,$$

d.h.

$$c' = \frac{c}{|\omega_0^2 - \omega^2 + 2r\omega\mathrm{i}|}, \quad \delta = \arg\left(\overline{\omega_0^2 - \omega^2 + 2r\omega\mathrm{i}}\right)$$

Beispiel:

Schwingungsgleichung

$$u'' + 5u' + 6u = 2\cos t$$

$\rightsquigarrow \quad 2r = 5,\ \omega_0 = \sqrt{6},\ \omega = 1,\ c = 2)$

starke Dämpfung: $r > \omega_0$

Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 5\lambda + 6$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_h = a\exp(-3t) + b\exp(-2t)$$

partikuläre Lösung

$$u_p = c' \cos(\omega t + \delta)$$

mit

$$\begin{aligned} c' &= \frac{c}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2r\omega)^2}} = \frac{2}{\sqrt{(6-1)^2 + (5\cdot 1)^2}} = \frac{2}{5\sqrt{2}} \\ \delta &= \arg(\omega_0^2 - \omega^2 - 2r\omega \mathrm{i}) = \arg((6-1) - (5\cdot 1)\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

d.h.

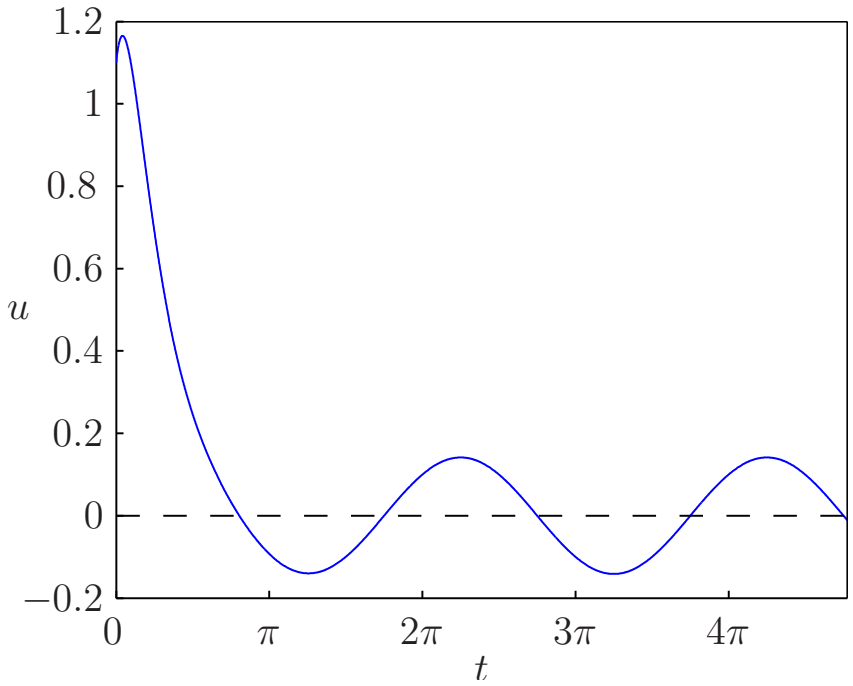
$$\begin{aligned} u &= u_h + u_p \\ &= a\exp(-3t) + b\exp(-2t) + \frac{2}{5\sqrt{2}}\cos(t - \pi/4) \end{aligned}$$

Anfangsbedingungen

$$u(0) = \frac{6}{5}, \quad u'(0) = \frac{6}{5}$$

$\rightsquigarrow$

$$u(t) = -3\exp(-3t) + 4\exp(-2t) + \frac{2}{5\sqrt{2}}\cos(t - \pi/4)$$



starke Dämpfung $\rightsquigarrow$ schneller Übergang in eine harmonische Schwingung

Beispiel:

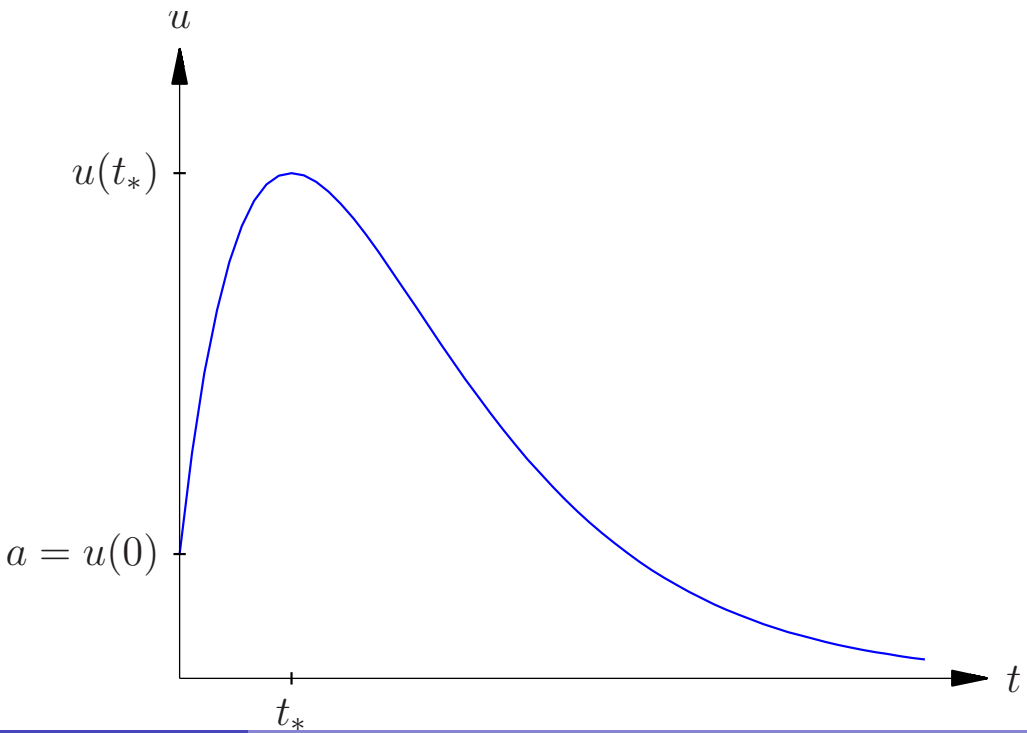
Schwingungsgleichung

$$u'' + 2\omega_0 u' + \omega_0^2 u = 0$$

kritische Dämpfung: $r = \omega_0$

$$u_h = (a + bt)\exp(-\omega_0 t)$$

starkes Anfangswachstum möglich



$\omega_0 = 1 \quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = (a + bt)\,\exp(-t)$$

maximal für $t_* = \frac{b-a}{b}$ und

$$\frac{|u(t_*)|}{|u(0)|} = \frac{b}{a}\exp\left(\frac{a}{b} - 1\right)$$

$\to \infty$ für $a/b \to 0$
(hohe Spannungen beim Ausschalten von Stromkreisen!)

Beispiel:

Schwingungsgleichung

$$u'' + 2u' + 50u = e^{\mathrm{i}\omega t}$$

schwache Dämpfung: $1 = r < \omega_0 = \sqrt{50}$
charakteristisches Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 50$ mit den komplex konjugierten Nullstellen $\lambda_{1,2} = -1 \pm 7\mathrm{i}$
$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$u_h = e^{-t}(a\cos(7t) + b\sin(7t))$$

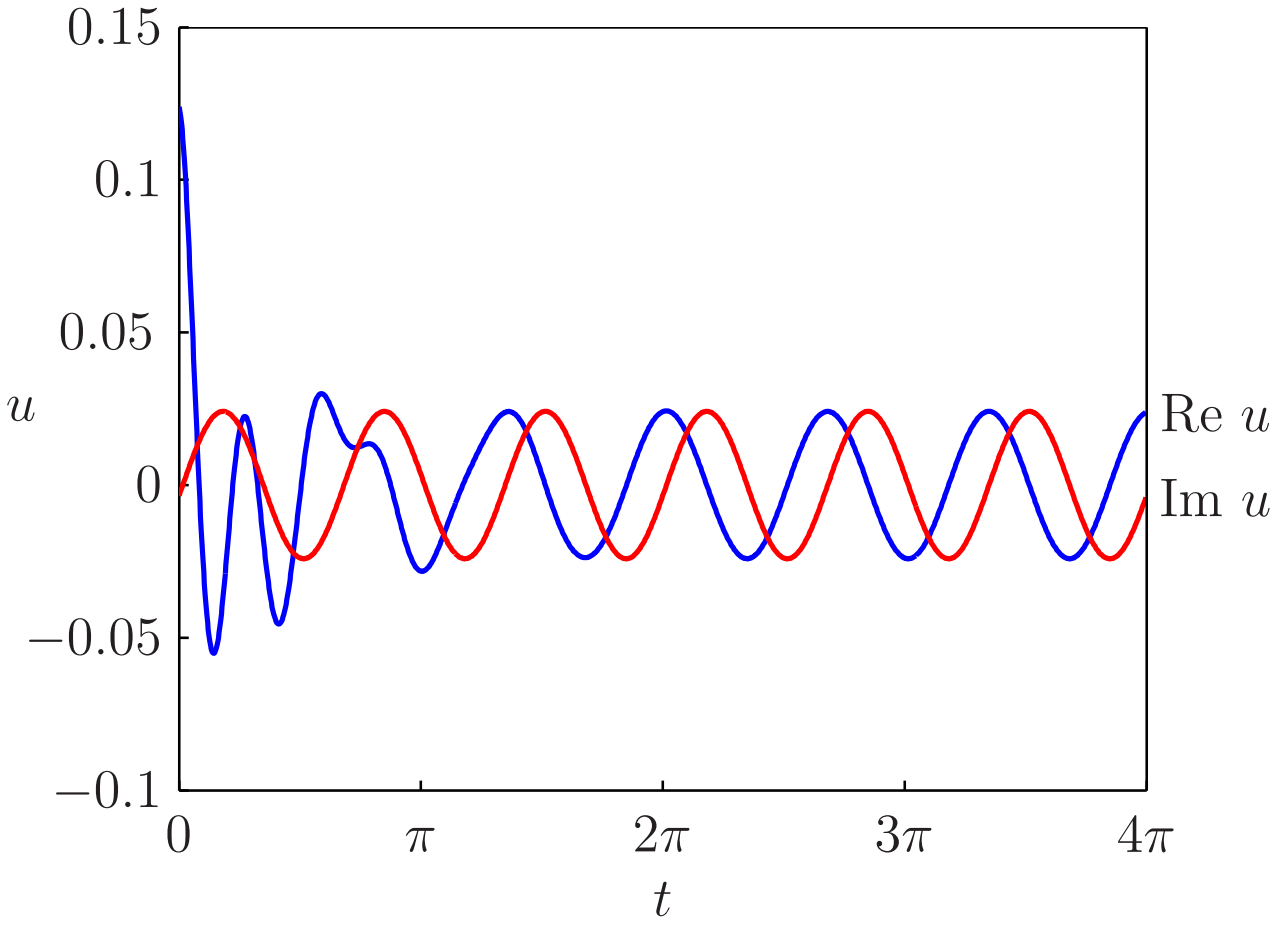
partikuläre Lösung

$$u_p = ce^{\mathrm{i}\omega t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$c = \frac{1}{-\omega^2 + 2\omega\mathrm{i} + 50}$$

Real- und Imaginärteil von $u = u_h + u_p$ für $a = 1/10$, $b = 0$, $\omega = 3$
schwache Dämpfung $\rightsquigarrow$ langsames Abklingen des homogenen Lösungsanteils



Betrag der komplexen Amplitude

$$|c| = \frac{1}{|(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\omega \mathrm{i}|} = \frac{1}{\sqrt{(50 - \omega^2)^2 + (2\omega)^2}}$$

maximal für $\omega_* = \sqrt{48}$, denn

$$W = \omega^2,\ 0 = \frac{d}{dW}(50 - W)^2 + 4W = -2(50 - W) + 4 \quad \Longrightarrow \quad W = 48$$

relativ kleiner Dämpfungskoeffizient $2r = 2$
$\Longrightarrow$ Resonanzfrequenz ω_* nahe bei $\omega_0 = \sqrt{50}$

Phasenebene

Die Lösungen einer autonomen Differentialgleichung zweiter Ordnung,

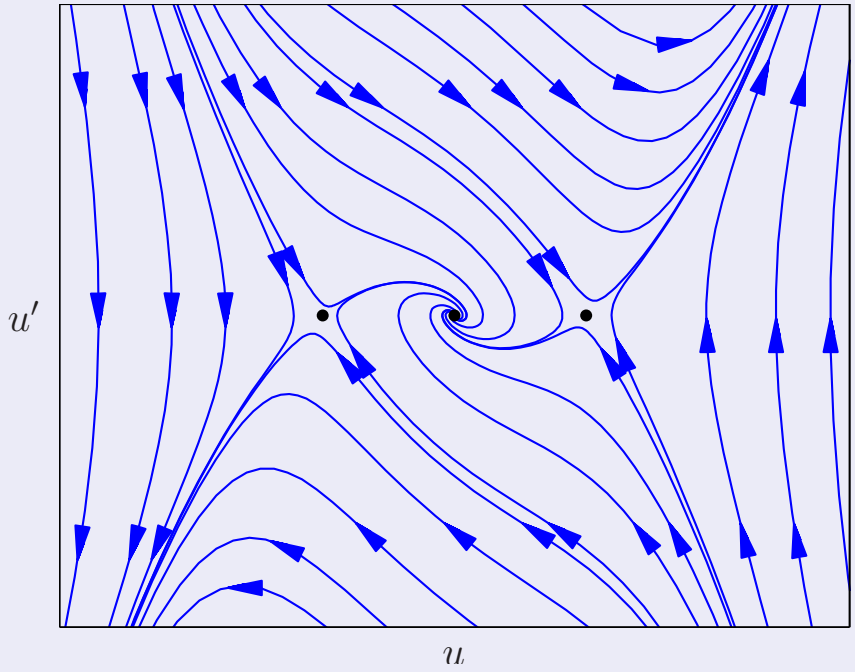
$$u'' = f(u, u')\,,$$

können als Kurven

$$t \mapsto (u(t), v(t)), \quad v = u'\,,$$

in der sogenannten Phasenebene visualisiert werden. Dabei verläuft für eine stetig differenzierbare Funktion f durch jeden Punkt (u_0, v_0) genau eine Lösungskurve.

Punkte $(u_0, 0)$ mit $f(u_0, 0) = 0$ sind kritische Punkte der Differentialgleichung, die konstanten Lösungen $u(t) = u_0$ entsprechen.



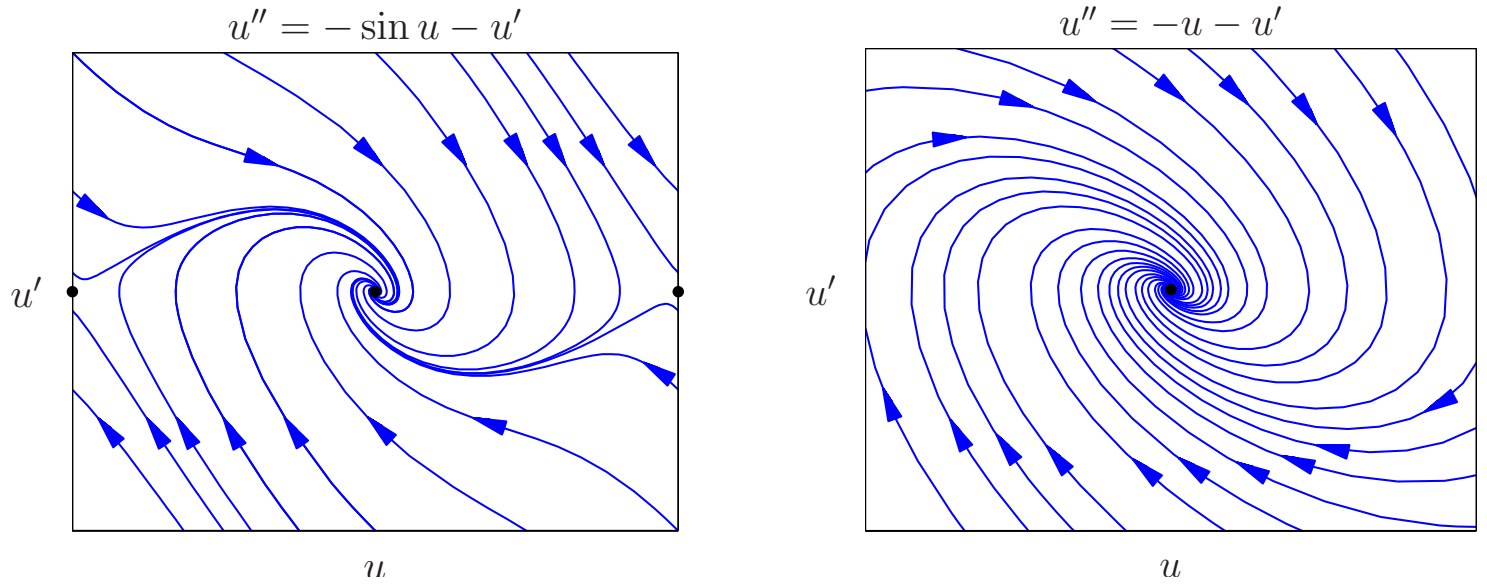
Fasst man $v = du/dt$ als Funktion von u auf, so ist $u'' = v' = dv/dt = (dv/du)(du/dt)$ und man erhält eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv}{du}v = f(u, v)\,,$$

die die Lösungskurven in der Phasenebene unmittelbar beschreibt.

Beispiel:

Phasenebenen für die Bewegungsgleichung eines gedämpften Pendels und die approximierende lineare Schwingungsgleichung



kleine Auslenkungen von u $\rightsquigarrow$ gute Übereinstimmung
globales qualitatives Verhalten unterschiedlich; mehrere kritische Punkte für die Pendelgleichung

Energieerhaltung

Die Differentialgleichung

$$u'' + \Phi'(u) = 0$$

beschreibt eine eindimensionale Bewegung unter einem durch ein Potential Φ induzierten Kraftfeld.
Für die Lösung u ist die Summe E aus kinetischer und potentieller Energie konstant:

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \Phi(u), \quad v = u' .$$

Die Lösungskurven in der Phasenebene entsprechen also konstanten Energieniveaus E.

Beispiel:

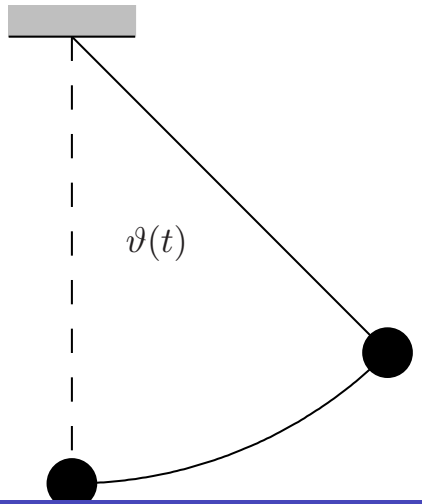
Differentialgleichung für die Auslenkung ϑ eines idealen Pendels

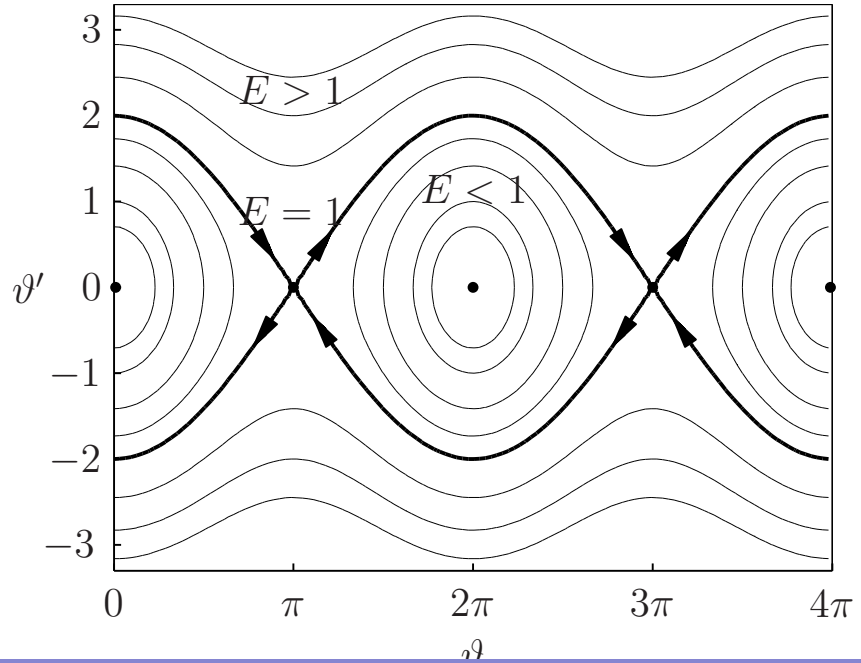
$$\vartheta'' = -\sin\vartheta$$

potentielle Energie $\Phi(\vartheta) = -\cos\vartheta \quad \rightsquigarrow \quad$ Gesamtenergie

$$E = \frac{1}{2}(\vartheta')^2 - \cos\vartheta$$

bzw. $\vartheta' = \pm\sqrt{2(E+\cos\vartheta)}$





Phasendiagramm $\rightsquigarrow$ drei qualitativ verschiedene Fälle

- $E < 1$: Lösungen periodisch, da $\cos\vartheta \neq -1$ (maximaler Wert $\vartheta_{\max} = \arccos(-E)$)
  Berechnung der Periode T aus der maximalen Auslenkung $\vartheta_{\max}$

$$T = 4\int_0^{\vartheta_{\max}} \frac{dt}{d\vartheta}\,d\vartheta\,, \qquad \frac{dt}{d\vartheta} = (\vartheta')^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_{\max})}}$$

  $(E = -\cos\vartheta_{\max})$
- $E > 1$: Die Geschwindigkeit ϑ' wird nie null; das Pendel schwingt über.
- $E = 1$: Das Pendel nähert sich dem instabilen höchsten Punkt, ohne ihn in endlicher Zeit zu erreichen.

Beispiel:

auf eine Rakete wirkende Kraft im Gravitationsfeld der Erde

$$F = -\frac{\gamma m M}{r^2}$$

m und M: Massen von Rakete und Erde
$\gamma > 0$: Gravitationskonstante
r: Abstand zum Erdmittelpunkt

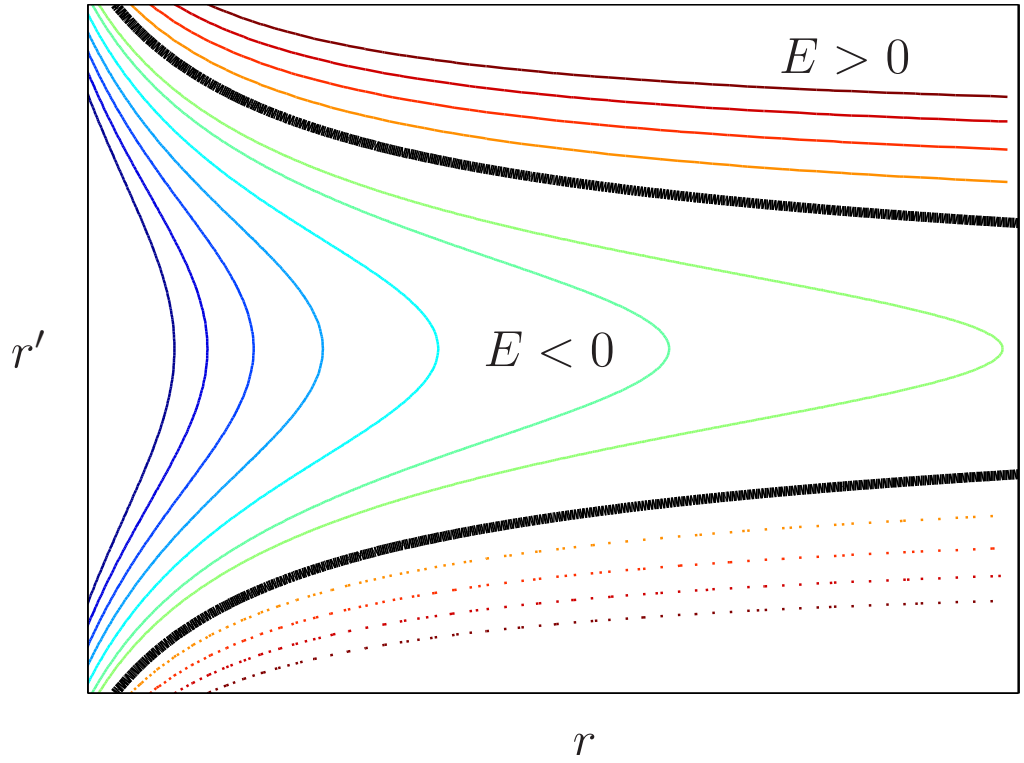
Bewegungsgleichung nach dem "Burnout" bei vertikaler Flugrichtung

$$r'' = -\frac{\gamma M}{r^2}$$

Anfangsbedingungen

$$r(0) = R, \quad r'(0) = v$$

R und v: Flughöhe und Geschwindigkeit bei "Burnout"



Lösungskurven für verschiedene Geschwindigkeiten v und $R = 6.371\,\mathrm{km}$ (Erdradius)
konstante Energieniveaus

$$E = \frac{1}{2}(r')^2 - \frac{\gamma M}{r}$$

$E < 0$: maximale Flughöhe

$$r_{max} = -\frac{\gamma M}{E}$$

$E \geq 0$: Flughöhe unbeschränkt

kritische Startgeschwindigkeit v_* (fett gezeichnete Lösungskurve)

$$\frac{1}{2}v_*^2 - \frac{\gamma M}{R} = E = 0$$

d.h. $v_* = \sqrt{2\gamma\frac{M}{R}}$
($r'(t) \to 0$ für $t \to \infty$)

System von Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Standardform eines Systems von Differentialgleichungen ist

$$u'(t) = f(t, u(t))$$

mit der Anfangsbedingung $u(t_0) = a$. Dabei ist $u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$ und $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

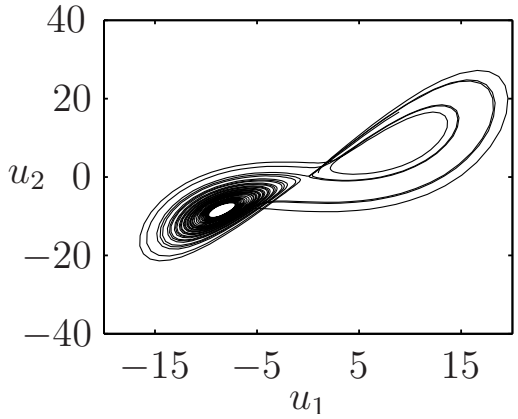
Hängt die Funktion f nicht explizit von t ab, so spricht man von einem autonomen System.

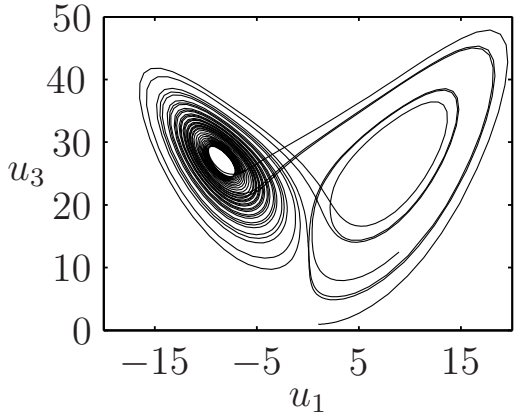
Beispiel:

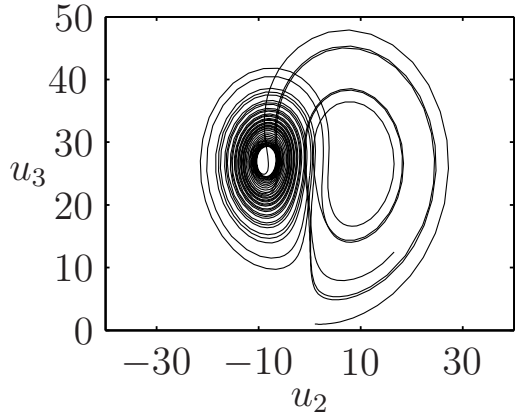
Lorenz-System

$$\begin{aligned} u_1' &= -\alpha u_1 + \alpha u_2 \\ u_2' &= -u_1 u_3 + \beta u_1 - u_2 \\ u_3' &= u_1 u_2 - \gamma u_3 \end{aligned}$$

geeignete Parameterwahl $\rightsquigarrow$ "Strange Attractor",
d.h. Konvergenz beschränkter Lösungskurven gegen eine fraktale Menge







verschiedene Perspektiven des Attractors für $\alpha = 10$, $\beta = 28$ und $\gamma = 8/3$

Transformation eines Differentialgleichungssystems auf Standardform

Für eine Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)}(t) = g(t, y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

setzt man

$$u(t) = (y(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$$

und erhält ein äquivalentes System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ &\vdots \\ u_{n-1}' &= u_n \\ u_n' &= g(t, u(t)) \,. \end{aligned}$$

Für ein System von Differentialgleichungen höherer Ordnung verfährt man analog.
Durch Einführen einer weiteren zusätzlichen Variablen $u_{n+1}(t) = t$ und der trivialen Differentialgleichung $u'_{n+1} = 1$ ließe sich auch die explizite Abhängigkeit der rechten Seite von t eliminieren, und man erhielte das autonome System

$$(u_1, \ldots, u_{n+1})' = g(u_{n+1}, u_1 \circ u_{n+1}, \ldots, u_n \circ u_{n+1}) .$$

Diese Umformung ist jedoch weniger gebräuchlich.

Beispiel:

Die Differentialgleichung

$$\varphi'' = f(t) - r\varphi' - \sin\varphi$$

beschreibt eine erzwungene Schwingung eines Pendels, wobei $r > 0$ den Reibungskoeffizienten und $f(t)$ die äußere Kraft bezeichnet.

Substitution $(u_1, u_2) = (\varphi, \varphi')$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ System erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= f(t) - ru_2 - \sin u_1 \end{aligned}$$

Einführen der weiteren Variable $u_3(t) = t$ und der zusätzlichen trivialen Gleichung

$$u_3' = 1$$

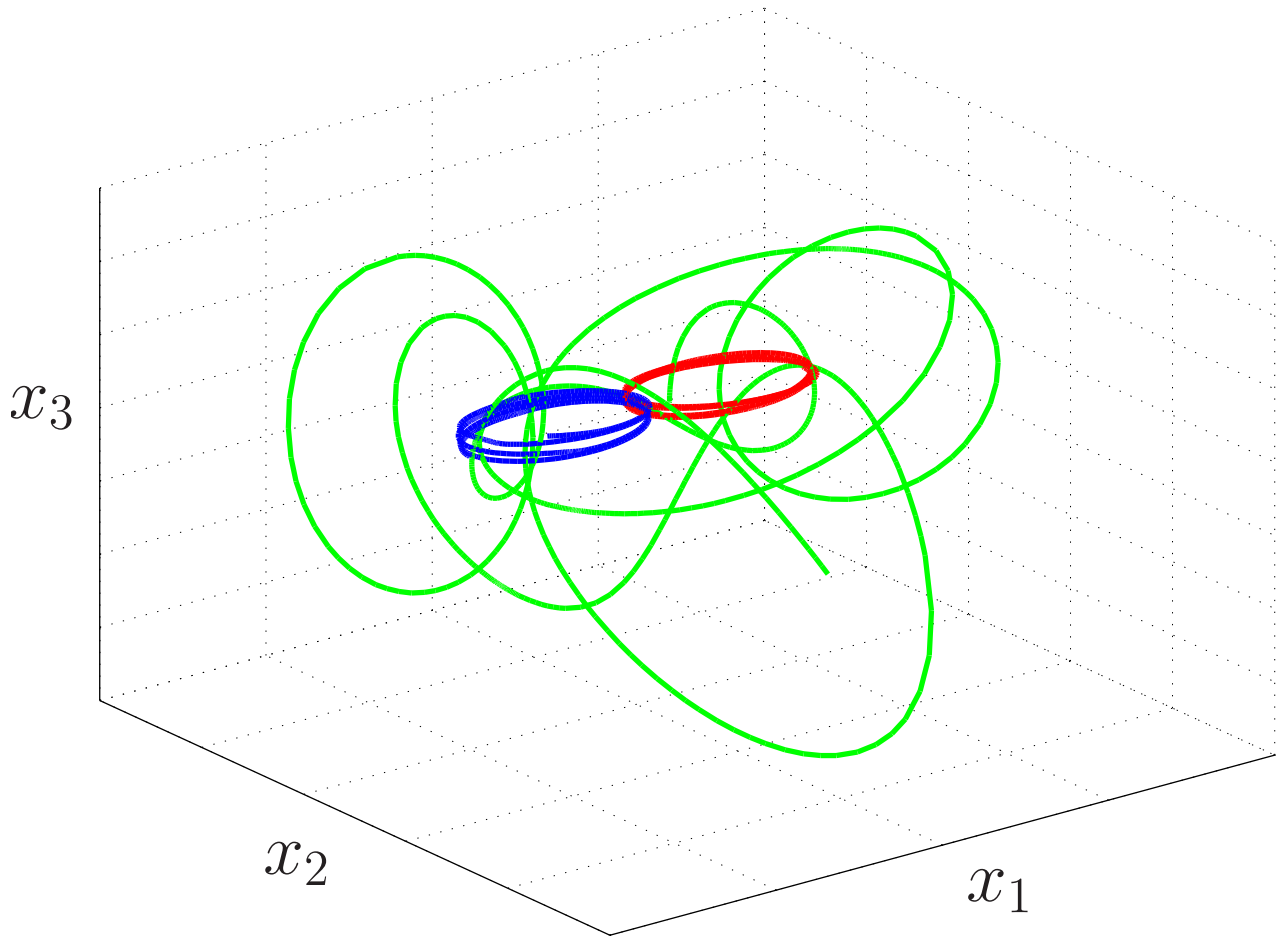
$\rightsquigarrow$ autonomes System

Beispiel:

Drei-Körper Problem:
Differentialgleichungen für die Bahnkurven $t \to P_j(t) \in \mathbb{R}^3$ von Himmelskörpern unter dem Einfluß von Gravitationskräften

$$\begin{aligned} P_1'' &= \gamma m_2 (P_2 - P_1)|P_2 - P_1|^{-3} + \gamma m_3 (P_3 - P_1)|P_3 - P_1|^{-3} \\ P_2'' &= \gamma m_1 (P_1 - P_2)|P_1 - P_2|^{-3} + \gamma m_3 (P_3 - P_2)|P_3 - P_2|^{-3} \\ P_3'' &= \gamma m_1 (P_1 - P_3)|P_1 - P_3|^{-3} + \gamma m_2 (P_2 - P_3)|P_2 - P_3|^{-3} \end{aligned}$$

mit $\gamma = 3.993\text{N km}^2\text{kg}^{-1}$ der Gravitationskonstante und m_k den Massen der Körper


x_3
x_2
x_1

Transformation auf Standardform durch Einführen von zusätzlichen Variablen

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = P_1\,, \quad \begin{pmatrix} u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = P_2\,, \quad \begin{pmatrix} u_{13} \\ u_{14} \\ u_{15} \end{pmatrix} = P_3$$

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = P_1'\,, \quad \begin{pmatrix} u_{10} \\ u_{11} \\ u_{12} \end{pmatrix} = P_2'\,, \quad \begin{pmatrix} u_{16} \\ u_{17} \\ u_{18} \end{pmatrix} = P_3'$$

$\rightsquigarrow$ System von 18 Differentialgleichungen erster Ordnung
zusätzliche Differentialgleichungen für die Hilfsvariablen

$$u'_{6(j-1)+k} = u_{6(j-1)+k+3}\,, \quad j,k = 1,2,3$$

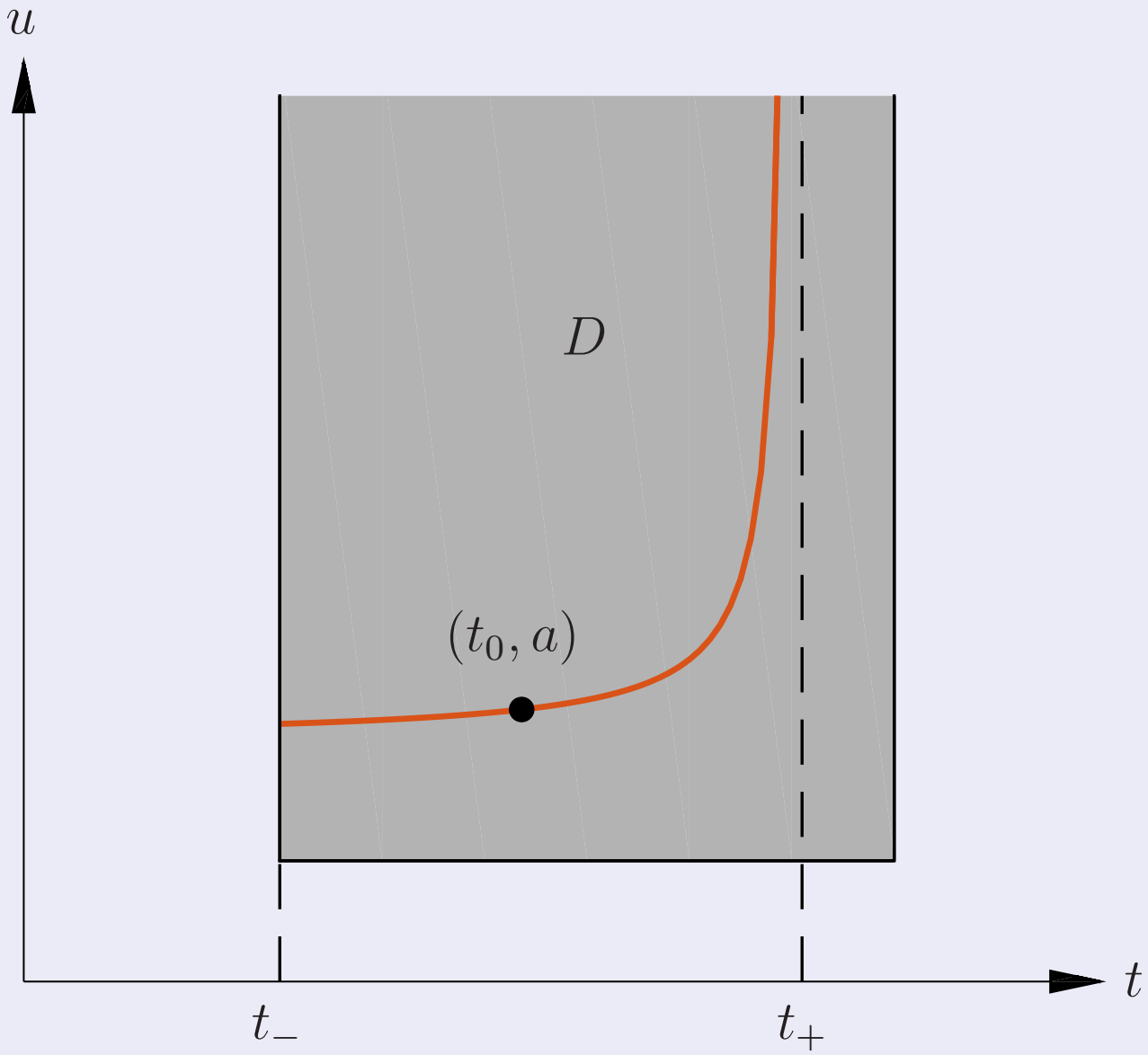
Satz von Peano

Für eine in einer offenen Umgebung D von $(t_0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetige Funktion f hat das Anfangswertproblem

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t_0) = a$$

mindestens eine stetig differenzierbare Lösung $(u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$ in einer Umgebung (t_-, t_+) von t_0.

Wie in der Abbildung illustriert ist, verläuft die Lösungskurve bis zum Rand von D. Ist die u-Komponente von D unbeschränkt, ist dabei insbesondere der Fall $|u(t)| \to \infty$ möglich.


u
D
(t_0, a)
t
t_-
t_+

Beispiel:

(i) Keine eindeutige Lösung:

$$u' = 2\sqrt{|u|}, \quad u(0) = 0$$

Lösungen

$$u_\tau = \begin{cases} 0, & x \leq \tau \\ (x-\tau)^2, & x \geq \tau \end{cases}$$

für beliebiges $\tau \geq 0$ bzw. (Symmetrie)

$$u_\tau = \begin{cases} 0, & x \geq \tau \\ -(\tau - x)^2, & x \leq \tau \end{cases}$$

für $\tau \leq 0$

(ii) Kleines Existenzintervall:

$$u' = u^2, \quad u(0) = 1$$

Lösung

$$u(t) = \frac{1}{1-t}$$

singulär für $t \to 1$

Eindeutigkeit der Lösung von Differentialgleichungssystemen

Ist $f(t,u)$ in einer Umgebung $[t_0-\delta, t_0+\delta]\times D$ von $(t_0,a)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig bzgl. $(u_1,\ldots,u_n)^{\mathrm{t}}$, d.h. gilt

$$|f(t,u)-f(t,\tilde{u})|\leq L|u-\tilde{u}|,$$

für $|t-t_0|\leq\delta$ und $u,\tilde{u}\in D$, dann ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t)=f(t,u(t)),\quad u(t_0)=a$$

mit Werten in D eindeutig.
In Verbindung mit dem Satz von Peano garantiert also die Lipschitz-Stetigkeit von f die lokale Existenz einer eindeutigen Lösung auf einem Intervall $(t_0-\delta_-, t_0+\delta_+)$ mit $0<\delta_\pm\leq\delta$.

Beweis:

betrachte für zwei Lösungen u und $\tilde{u}$ die Differenz

$$u'(t) - \tilde{u}'(t) = f(t, u(t)) - f(t, \tilde{u}(t))$$

Integration, Lipschitz-Bedingung für $|t - t_0| \leq \Delta = \min(\delta, 1/(2L))$ $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} |u(t) - \tilde{u}(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\, ds \right| \\ &\leq \underbrace{|t - t_0|}_{\leq 1/(2L)}\, L \underbrace{\max_{|s-t_0| \leq \Delta} |u(s) - \tilde{u}(s)|}_{= M} \end{aligned}$$

Bilden des Maximums der linken Seite über $t \in I = [t_0 - \Delta, t_0 + \Delta]$
$\Longrightarrow$ $M \leq M/2$ und somit $M = 0$, d.h. $u = \tilde{u}$ auf I

Iteration des Arguments mit $t_0 \leftarrow t \pm \Delta$ $\Longrightarrow$ Behauptung

Beispiel:

(i) Lokale Existenz:

$$u' = tu^2, \quad u(0) = 1$$

bestimme eine Lipschitz-Konstante L für $f(t,u) = tu^2$

$$f(t,u) - f(t,\tilde{u}) = t(u^2 - \tilde{u}^2) = [t(u+\tilde{u})]\,(u-\tilde{u})$$

$\Longrightarrow$ Abhängigkeit von L von dem Betrag der Lösung
$\delta = 2$, $D = [0,4]$, d.h. $(t,u),(t,\tilde{u}) \in [-2,2] \times [0,4]$ $\rightsquigarrow$

$$L = \max[\ldots] = 2 \cdot (2 \cdot 4) = 16$$

Die Lösung (bestimmt durch Separation der Variablen)

$$u(t) = \frac{1}{1 - t^2/2}$$

ist eindeutig; wird jedoch für $t = \sqrt{2}$ singulär, d.h. sie existiert nur auf einem Teilintervall von $[-2,2]$.

(ii) Globale Existenz:

$$u' = \sin(tu), \quad u(0) = 1$$

Mittelwertsatz $\Longrightarrow$

$$f(t,u) - f(t,\tilde{u}) = [\cos(s)\, t]\,(u - \tilde{u})$$

$\Longrightarrow$ $L = \max[\ldots] = T$ ist Lipschitz-Konstante auf dem Bereich $[-T, T] \times \mathbb{R}$
$|u'(t)| \leq 1$ $\Longrightarrow$

$$|u(t)| \leq 1 + |t|$$

Satz von Peano (Existenz bis zum Rand des Stetigkeitsbereichs) $\Longrightarrow$ Existenz im gesamten Interval $(-T, T)$
T beliebig $\rightsquigarrow$ Existenz einer eindeutigen Lösung auf $\mathbb{R}$

Ableitung nach Anfangsbedingungen

Das Anfangswertproblem

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = a\,,$$

lässt sich für stetig differenzierbares f nach $(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{t}}$ partiell ableiten. Man erhält die Matrix-Differentialgleichung

$$u'_a = f_u(t,u)u_a, \quad u_a(t_0) = E\,,$$

mit der Jacobi-Matrix $u_a = (\partial u/\partial a_1,\ldots,\partial u/\partial a_n)$ und E der $(n\times n)$ Einheitsmatrix.
Durch Taylor-Entwicklung folgt für die Lösung v zu einem benachbarten Anfangswert $v(t_0) = a + \Delta a$

$$v(t) = u(t) + u_a(t)\Delta a + O((\Delta a)^2)\,.$$

Beispiel:

Differentialgleichungen für die Bahnkurve eines antriebslosen Raumschiffs in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} r' &= u \\ u' &= \frac{v^2}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \\ v' &= -\frac{uv}{r} \end{aligned}$$

γ: Gravitationskonstante
r: Abstand vom Erdmittelpunkt
u, v: radiale und tangentiale Geschwindigkeitskomponente

stationärer Orbit:

$$\begin{pmatrix} r' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \sqrt{\gamma / r_0} \end{pmatrix}$$

Störung der Anfangswerte:

$$p^{\mathrm{t}} = (r_0, 0, \sqrt{\gamma/r_0}) \to \tilde{p}^{\mathrm{t}}$$

Näherung für die resultierende Bahnkurve

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \sqrt{\gamma/r_0} \end{pmatrix} + \underbrace{J(t) \begin{pmatrix} \Delta r(0) \\ \Delta u(0) \\ \Delta v(0) \end{pmatrix}}_{d(t)}$$

Jacobi-Matrix J bestimmt durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$J' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{r_0^3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{\gamma/r_0}}{r_0} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{\gamma/r_0}}{r_0} & 0 \end{pmatrix}}_{A} J\,,\ J(0) = E\,,$$

Berechnung von A durch Einsetzen der ungestörten Lösung in die Ableitung der rechten Seite:

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v^2}{r^2} + 2\frac{\gamma}{r^3} & 0 & \frac{2v}{r} \\ \frac{uv}{r^2} & -\frac{v}{r} & -\frac{u}{r} \end{array} \right) \Bigg|_{(r,u,v)=(r_0,0,\sqrt{\gamma/r_0})}$$

(Bei einem stationären Orbit hängt A nicht von t ab.)
$\rightsquigarrow$ Berechnung von $d(t)$ durch Lösen eines linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten:

$$d'(t) = J'(t)\, d(0) = A\, J(t)\, d(0) = A\, d(t), \quad d(0) = \left(\begin{array}{c} \Delta r(0) \\ \Delta u(0) \\ \Delta v(0) \end{array} \right)$$

Lineares Differentialgleichungssystem

Ein lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = A(t)u + b(t)$$

mit stetiger Koeffizientenmatrix A und stetigem Vektor b besitzt eine eindeutige Lösung $(u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}}$ für jeden Anfangswert $u(t_0)$.
Insbesondere besitzt das homogene System $u' = A(t)u$ n linear unabhängige Lösungen $v, w, \ldots$, d ie man in einer Fundamentalmatrix

$$\Gamma = (v, w, \ldots)$$

zusammenfassen kann.

Die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems hat die Form

$$u = u_p + u_h, \quad u_h = \Gamma c$$

wobei u_p eine partikuläre Lösung und u_h eine Lösung des homogenen Systems ist, und

$$c = \Gamma(t_0)^{-1}(u(t_0) - u_p(t_0))$$

durch eine Anfangsbedingung in einem Punkt t_0 festgelegt werden kann.

Beweis:

(i) Lokale Existenz und Eindeutigkeit:
Lipschitz-Konstante

$$L = \max_{t \in [t_0, t_1]} \|A(t)\|$$

(t_1 beliebig)
allgemeine Theorie $\rightsquigarrow$ eindeutige Lösung auf $[t_0, t_\star]$ ($t_\star > t_0$ maximal)

(ii) Globale Existenz:
zeige $t_\star = t_1$ durch Schranke für die Lösung (Ausschluss von Singularitäten)

Multiplikation mit u $\rightsquigarrow$

$$u^{\mathrm{t}} u' = u^{\mathrm{t}} A(t) u + u^{\mathrm{t}} b(t)$$

bzw. mit $r = u^{\mathrm{t}} u = |u|^2$ und der Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

$$\frac{1}{2} r' \leq \|A(t)\| r + \frac{1}{2} \left(r + |b(t)|^2 \right)$$

Abschätzung der rechten Seite mit $C = \max_{t\in[t_0,t_1]} (\|A(t)\|, |b(t)|)$ $\rightsquigarrow$

$$r' \leq (2C+1)r + C^2$$

$r \geq 0$ $\Longrightarrow$ r wird majorisiert durch die Lösung von

$$R' = \alpha R + \beta, \quad \alpha = 2C+1,\ \beta = C^2\,,$$

d.h.

$$r(t) \leq R(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \left(r(t_0) + \frac{\alpha}{\beta}\right)\, \mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)}$$

(ii) Darstellung der Lösung:
Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ als Anfangswerte $u(t_0)$
$\rightsquigarrow$ n linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems

überprüfe Form der allgemeinen Lösung $u = u_p + u_h$

- Differentialgleichungssystem:

$$u_p' + u_h' = A(t)u_p + b(t) + A(t)u_h = A(t)(u_p + u_h) + b(t)$$

- Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} u_p(t_0) + u_h(t_0) &= u_p(t_0) + \Gamma(t_0)c \\ &= u_p(t_0) + \Gamma(t_0)\Gamma(t_0)^{-1}(u(t_0) - u_p(t_0)) \\ &= u(t_0) \end{aligned}$$

Beispiel:

Differentialgleichungssystem

$$u' = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix}$$

(i) Lösungen des homogenen Differentialgleichungssystems:
zweite Komponente

$$u_2' = 2u_2$$

$\rightsquigarrow$ $u_2 = \alpha e^{2t}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig
Einsetzen in erste Komponente $\rightsquigarrow$

$$u_1' = u_1 + \alpha t e^{2t}$$

Ansatz $u_1 = (\beta + \gamma t)e^{2t} + \delta e^t$ $\rightsquigarrow$

$$\delta e^t + \gamma e^{2t} + 2(\beta + \gamma t)e^{2t} = \delta e^t + (\beta + \gamma t)e^{2t} + \alpha t e^{2t}$$

bzw. nach Koeffientenvergleich

$$\begin{aligned} \mathrm{e}: \quad & \delta &=& \delta \\ \mathrm{e}^{2t}: \quad & \gamma + 2\beta &=& \beta \\ te^{2t}: \quad & 2\gamma &=& \gamma + \alpha \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\delta \in \mathbb{R}$ beliebig, $\gamma = \alpha$, $\beta = -\alpha$ und

$$u_1 = \delta \mathrm{e}^t + \alpha(t-1)\mathrm{e}^{2t}$$

zwei linear unabhängige Lösungen durch Wahl von $\alpha = 0$, $\delta = 1$ und $\alpha = 1$, $\delta = 0$

$\rightsquigarrow$ Fundamentalmatrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & (t-1)\mathrm{e}^{2t} \\ 0 & \mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}$$

(ii) Partikuläre Lösung:
zweite Komponente des Differentialgleichungssystems

$$u_2' = 2u_2 + \mathrm{e}^t$$

$\rightsquigarrow \quad u_2 = -\mathrm{e}^t$
Einsetzen in erste Komponente des Differentialgleichungssystems

$$u_1' = u_1 - t\mathrm{e}^t + \cos t$$

Ansatz $u_1 = (pt + qt^2)\mathrm{e}^t + r\cos t + s\sin t \quad \rightsquigarrow$

$$u_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^t + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

(iii) Allgemeine Lösung:

$$u_p + \Gamma c = u_p + \begin{pmatrix} c_1\mathrm{e}^t + c_2(t-1)\mathrm{e}^{2t} \\ c_2\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}$$

Wronski-Determinante

Für eine Fundamentalmatrix Γ des homogenen Differentialgleichungssystems $u' = A(t)u$ gilt für die sogenannte Wronski-Determinante $\det \Gamma(t)$

$$(\det \Gamma)' = \operatorname{Spur} A \, (\det \Gamma) \, .$$

Damit ist

$$\det \Gamma(t) = \det \Gamma(t_0) \exp \left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{Spur} A(s) \, ds \right) > 0 \, ,$$

woraus insbesondere folgt, dass $\Gamma(t)$ für alle $t > t_0$ invertierbar ist, falls $\det \Gamma(t_0) \neq 0$.

Beweis:

$\Gamma' = A\Gamma$, lineare Taylor-Approximation $\Longrightarrow$

$$\Gamma(t + \Delta t) = \Gamma(t) + A(t)\Gamma(t)\Delta t + O((\Delta t)^2)$$

und

$$\frac{d}{dt} \det \Gamma = \lim_{\Delta t \searrow 0} \frac{\det(\Gamma(t) + A(t)\Gamma(t)\Delta t) - \det \Gamma(t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

Mit Γ_j den Zeilen von A gilt

$$\text{Zeile } k \text{ von } A\Gamma : \sum_j a_{k,j}\Gamma_j$$

entwickle die im Differentialquotienten auftretende Determinante

$$\Gamma + A\Gamma\Delta t = \begin{pmatrix} \Gamma_1 + \Delta t \sum_j a_{1j}\Gamma_j \\ \Gamma_2 + \Delta t \sum_j a_{2j}\Gamma_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

berücksichtige nur Determinanten mit höchstens einem Faktor Δt
streiche Determinanten mit zwei linear abhängigen Zeilen
$\rightsquigarrow$ vereinfachte Entwicklung der Determinante

$$\det \begin{pmatrix} \Gamma_1 + \Delta t \sum_j a_{1j}\Gamma_j \\ \Gamma_2 + \Delta t \sum_j a_{2j}\Gamma_j \\ \vdots \end{pmatrix} = \det\Gamma + \Delta t\, a_{11} \det\Gamma + \Delta t\, a_{22} \det\Gamma + \cdots$$

$$= \det\Gamma + \Delta t\, \mathrm{Spur}\, A \det\Gamma$$

$\Longrightarrow$ Differentialgleichung für $d = \det\Gamma$:

$$d' = sd, \quad s = \mathrm{Spur}\, A$$

Integration $\rightsquigarrow$

$$d(t) = d(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^{t} s(\tau)\, d\tau \right)$$

Beispiel:

homogene Differentialgleichung

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} u$$

Spur $A = 3 \implies (\det \Gamma)' = 3(\det \Gamma)$ und

$$\det \Gamma = c \exp(3t), \quad c = \det \Gamma(0)$$

für jede Fundamentalmatrix Γ ($\Gamma' = A\Gamma$)

z.B. $c = 1$ für

$$\Gamma(t) = \begin{pmatrix} \exp(t) & (t-1)\exp(2t) \\ 0 & \exp(2t) \end{pmatrix}$$

Variation der Konstanten

Die Lösung des Differentialgleichungssystems

$$u' = A(t)u + b(t)$$

kann mit Hilfe einer Fundamentalmatrix $\Gamma(t)$ ($\Gamma' = A\Gamma$) ausgedrückt werden.
Für einen beliebigen Vektor c ist

$$u_h(t) = \Gamma(t)c$$

eine Lösung des homogenen Systems.
Variation der Konstanten durch den Ansatz $u(t) = \Gamma(t)c(t)$ führt auf

$$u(t) = \Gamma(t)\left[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds\right].$$

Beweis:

Differentiation von $u(t)$:

$$u'(t) = \left\{ \Gamma'(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1} b(s)\, ds \right] + \Gamma(t)\,\Gamma(t)^{-1} b(t) \right\}$$

Γ Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ($\Gamma' = A\Gamma$) $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \{\cdots\} &= A(t)\Gamma(t) \left[\Gamma(t_0)^{-1} u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1} b(s)\, ds \right] + b(t) \\ &= A(t)u(t) + b(t) \end{aligned}$$

($u = \Gamma[\cdots]$)

Auswerten von u an t_0 $\quad \rightsquigarrow \quad$ Anfangsbedingung

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Fundamentalmatrix des homogenen Systems:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \cosh(t^2/2) & \sinh(t^2/2) \\ \sinh(t^2/2) & \cosh(t^2/2) \end{pmatrix},$$

denn

$$\Gamma' = \begin{pmatrix} t\sinh(t^2/2) & t\cosh(t^2/2) \\ t\cosh(t^2/2) & t\sinh(t^2/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t \\ t & 0 \end{pmatrix} \Gamma$$

$\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh(t^2/2) & -\sinh(t^2/2) \\ -\sinh(t^2/2) & \cosh(t^2/2) \end{pmatrix}$$

Lösungsformel $u(t) = \Gamma(t)[\Gamma(t_0)^{-1}u(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Gamma(s)^{-1}b(s)\,ds]$ und Verwendung der Abkürzungen $C = \cosh$, $S = \sinh \quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = \begin{pmatrix} C(t^2/2) & S(t^2/2) \\ S(t^2/2) & C(t^2/2) \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} sC(s^2/2) \\ -sS(s^2/2) \end{pmatrix} ds \right.$$

d.h.

$$u(t) = \begin{pmatrix} 2S(t^2/2) + C(t^2/2) \\ S(t^2/2) + 2C(t^2/2) - 1 \end{pmatrix}$$

Eigenlösungen eines Differentialgleichungssystems

Ist v ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ, dann ist

$$u(t) = \exp(\lambda t)v$$

eine Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$u' = Au\,.$$

Bei einem komplexen Eigenwert $\lambda = \sigma \pm \varrho \mathrm{i}$ sind für eine reelle Matrix Real- und Imaginärteil von u,

$$\exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)\,\mathrm{Re}\,v - \sin(\varrho t)\,\mathrm{Im}\,v), \quad \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)\,\mathrm{Im}\,v) + \sin(\varrho t)\,\mathrm{Re}\,v)\,,$$

Lösungen.

Falls eine Basis aus Eigenvektoren $v_1, \ldots, v_n$ existiert, d.h., falls A diagonalisierbar ist,

$$Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad Q = (v_1, \ldots, v_n),$$

dann lässt sich das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au + b(t)$$

entkoppeln. Mit $u = Qd$, $c = Q^{-1}b$ ist

$$d_k' = \lambda_k d_k + c_k(t), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Diese skalaren linearen Differentialgleichungen können explizit gelöst werden:

$$d_k(t) = \exp(\lambda_k t) \left[\exp(-\lambda_k t_0) d_k(t_0) + \int_{t_0}^{t} \exp(-\lambda_k s) c_k(s)\, ds \right].$$

Beweis:

(i) Eigenlösungen:
$Av = \lambda v \quad \Longrightarrow$

$$u(t) = \exp(\lambda t)v$$

löst die homogene Differentialgleichung, denn

$$u' = \lambda \exp(\lambda t)\, v, \;\; Au = \exp(\lambda t)\, \underbrace{Av}_{\lambda v}$$

komplexer Eigenwert $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\varrho$ und Eigenvektor $v = p + \mathrm{i}q \quad \rightsquigarrow$ Lösungen

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} u(t) &= \operatorname{Re} \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t) + \mathrm{i}\sin(\varrho t))(p + \mathrm{i}q) \\ &= \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)p - \sin(\varrho t)q) \\ \operatorname{Im} u(t) &= \exp(\sigma t)(\cos(\varrho t)q + \sin(\varrho t)p) \end{aligned}$$

(ii) Diagonalisierung:
Substitution von $u = Qd$ im Differentialgleichungssystem $\rightsquigarrow$

$$(Qd)' = A(Qd) + b$$

$(Qd)' = Qd'$, Multiplikation mit Q^{-1} $\rightsquigarrow$

$$d' = \underbrace{Q^{-1}AQ}_{\text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} d + c$$

k-te Komponente: skalare lineare Differentialgleichung $d_k' = \lambda_k d_k + c_k(t)$
Variation der Konstanten $\rightsquigarrow$ angegebene Lösungsdarstellung
Probe:

$$d_k' = \lambda_k \exp(\lambda_k t)[\ldots] + \exp(\lambda_k t)\exp(-\lambda_k t)c_k(t) \quad \checkmark$$

Beispiel:

lineares Differentialgleichungssystem

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} u + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{b(t)}, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren A

$$\lambda_1 = 5,\ v_1 = (1,1)^{\mathrm{t}}, \quad \lambda_2 = 1,\ v_2 = (1,-1)^{\mathrm{t}}$$

Diagonalisierung $Q^{-1}AQ = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ mit

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Substitution $d = Q^{\mathrm{t}}u \quad \rightsquigarrow$

$$d' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}}_{c(t)=Q^{\mathrm{t}}b(t)}, \quad d(0) = Q^{\mathrm{t}}u(0) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung des entkoppelten Systems:

- $d_1' = 5d_1 + t/\sqrt{2}$, $d_1(0) = \sqrt{2}$:

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \mathrm{e}^{5t}\left[\sqrt{2} + \int_0^t \mathrm{e}^{-5s}\frac{s}{\sqrt{2}}\,ds\right] \\ &= \mathrm{e}^{5t}\left[\sqrt{2} + \left[-\mathrm{e}^{-5s}\frac{s}{5\sqrt{2}}\right]_0^t + \int_0^t \mathrm{e}^{-5s}\frac{1}{5\sqrt{2}}\,ds\right] \\ &= \mathrm{e}^{5t}\left[\sqrt{2} - \frac{\mathrm{e}^{-5t}t}{5\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{e}^{-5t}}{25\sqrt{2}} + \frac{1}{25\sqrt{2}}\right] \\ &= \frac{51}{25\sqrt{2}}\mathrm{e}^{5t} - \frac{5t+1}{25\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- $d_2' = d_2 - t/\sqrt{2}$, $d_2(0) = 0$:

$$\begin{aligned} d_2(t) &= \mathrm{e}^{t}\left[0 + \int_0^t \mathrm{e}^{-s}\left(-\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\,ds\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\mathrm{e}^{t} + t + 1\right) \end{aligned}$$

Rücktransformation $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
u(t) &= Qd(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} d_1(t) + d_2(t) \\ d_1(t) - d_2(t) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{50} \begin{pmatrix} 51\mathrm{e}^{5t} - 25\mathrm{e}^{t} + 20t + 24 \\ 51\mathrm{e}^{5t} + 25\mathrm{e}^{t} - 30t - 26 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\frac{51}{50}\mathrm{e}^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{u_h} + \underbrace{\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10t + 12 \\ -15t - 13 \end{pmatrix}}_{u_p}
\end{aligned}
$$

Probe:

$u(0) = (1, 1)^{\mathrm{t}}$ ✓

u_h besteht aus Eigenlösungen ✓

u_p erfüllt die Differentialgleichung $u_p' = Au_p + (0, t)^{\mathrm{t}}$:

$$
\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 10t + 12 \\ -15t - 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \checkmark
$$

Jordan-Form eines linearen Differentialgleichungssystems

Das Differentialgleichungssystem

$$u' = Au + b(t), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},$$

kann durch Transformation auf Jordan-Form, $A \to J = Q^{-1}AQ$, gelöst werden.
Mit $u = Qv$, $c = Q^{-1}b$ folgt

$$\begin{aligned} v_n' &= \lambda_n v_n + c_n(t) \\ v_{n-1}' &= \lambda_{n-1} v_{n-1} + \varrho_n v_n + c_{n-1}(t) \\ &\vdots \\ v_1' &= \lambda_1 v_1 + \varrho_2 v_2 + c_1(t), \end{aligned}$$

wobei λ_k die Eigenwerte von A (bzw. Diagonalelemente von J) sind und $\varrho_k \in \{0, 1\}$. Diese skalaren linearen Differentialgleichungen für v_k lassen sich sukzessive für $k = n, \ldots, 1$ lösen.

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 12 & -3 \\ -1 & 14 & -1 \\ -1 & 4 & 9 \end{pmatrix}}_{A} u, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformation

$$u = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{Q} v$$

$\rightsquigarrow$ Jordan-Form

$$v' = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}_{J = Q^{-1}AQ} v \,, \qquad v(0) = Q^{-1}u(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösungen der letzten beiden Differentialgleichungen

$$v_3 = 2\exp(10t), \quad v_2 = -2\exp(10t)$$

Einsetzen in die erste Differentialgleichung $\rightsquigarrow$

$$v_1' = 10v_1 - 2\exp(10t)\,, \qquad v_1(0) = -1\,,$$

d.h.

$$v_1 = -2t\exp(10t) - \exp(10t)$$

Rücktransformation $\rightsquigarrow$

$$u(t) = Qv(t) = \begin{pmatrix} -3v_1 - v_3 \\ -v_1 \\ -v_1 + v_2 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6t+1 \\ 2t+1 \\ 2t+1 \end{pmatrix} e^{10t}$$

Stabilität linearer Differentialgleichungssysteme

Ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$u' = Au, \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},$$

ist

- stabil, wenn

  $$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = 0$$

  für alle Anfangswerte $u(0)$;
- neutral stabil, wenn jede Lösung $u(t)$ für alle $t > 0$ beschränkt bleibt und es Startwerte $u(0)$ gibt, für die $u(t)$ nicht gegen 0 konvergiert;
- instabil, wenn

  $$\lim_{t\to\infty} |u(t)| = \infty$$

  für einen Anfangswert $u(0)$.

Stabilität lässt sich mit Hilfe der Eigenwerte λ von A charakterisieren. Notwendig und hinreichend ist, dass $\operatorname{Re}\lambda < 0$ für alle Eigenwerte. Existiert hingegen ein Eigenwert mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$, so ist das System instabil.

Beispiel:

zweidimensionales System

$$u' = Au, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Eigenwerte $\lambda_\pm = \alpha \pm \mathrm{i}$

$\mathrm{Re}\,\lambda_\pm = \alpha \quad \Longrightarrow$

- stabil für $\alpha < 0$
- instabil für $\alpha > 0$

$\alpha = 0$:

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = -u_1$$

$\Longrightarrow$

$$u_1(t) = a\cos t + b\sin t, \quad u_2(t) = -a\sin t + b\cos t$$

beschränkte Lösungen $\Longrightarrow$ neutrale Stabilität

Klassifizierung reeller zweidimensionaler linearer Differentialgleichungssysteme

Das qualitative Verhalten der Lösungen des Differentialgleichungssystems

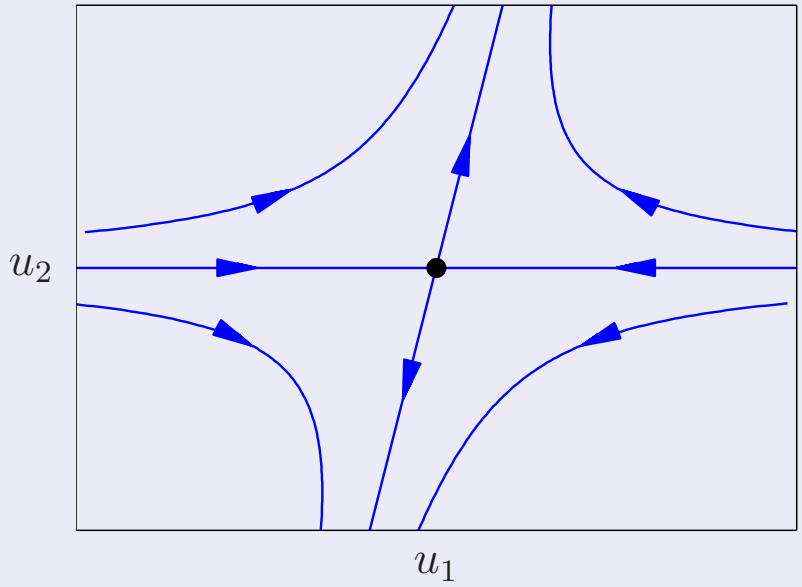
$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}},$$

mit A einer reellen 2×2-Matrix lässt sich anhand der Jordan-Form

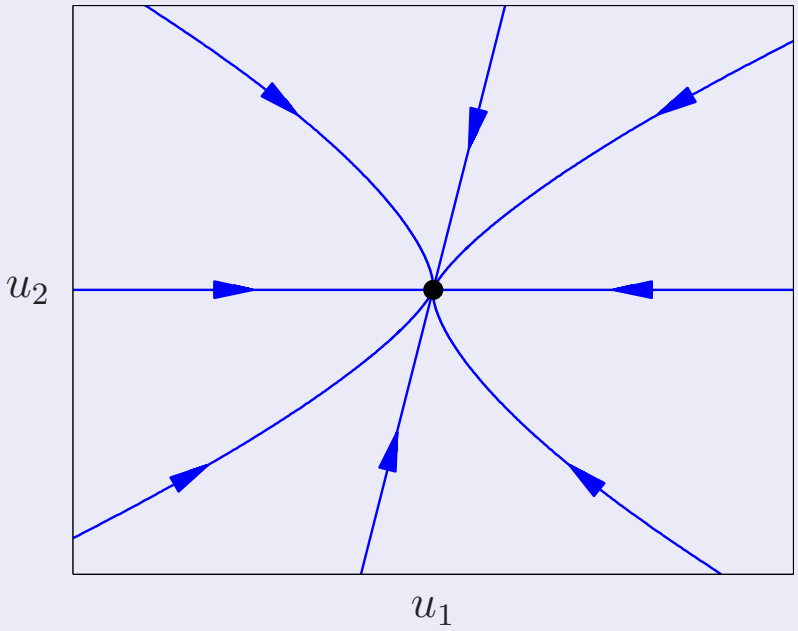
$$J = \begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ, \qquad s \in \{0, 1\},$$

von A klassifizieren $(u = Qv \;\Rightarrow\; v' = Jv)$.
Die folgenden Abbildungen zeigen jeweils den Verlauf typischer Lösungskurven.

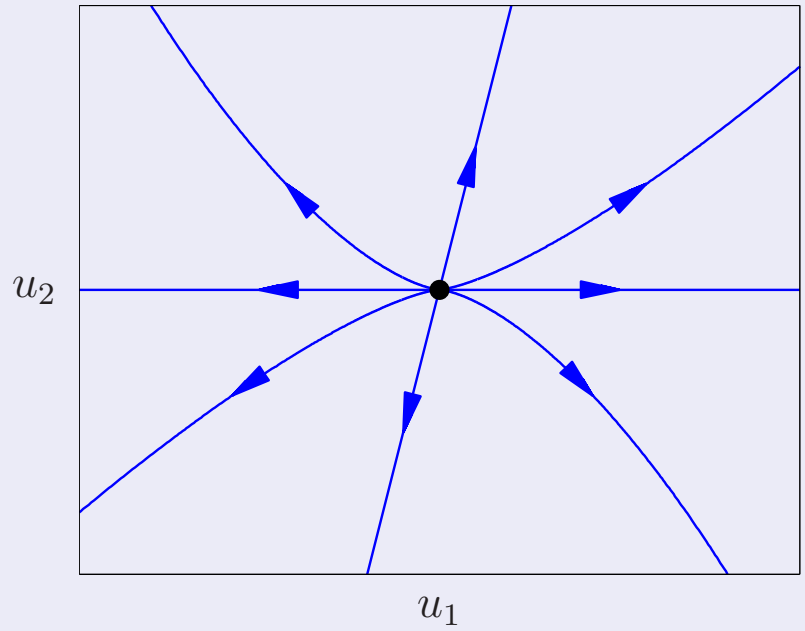
- Instabiler Sattel: $\lambda\varrho < 0$



- Knoten: $\lambda\varrho > 0,\ \lambda, \varrho \in \mathbb{R}$

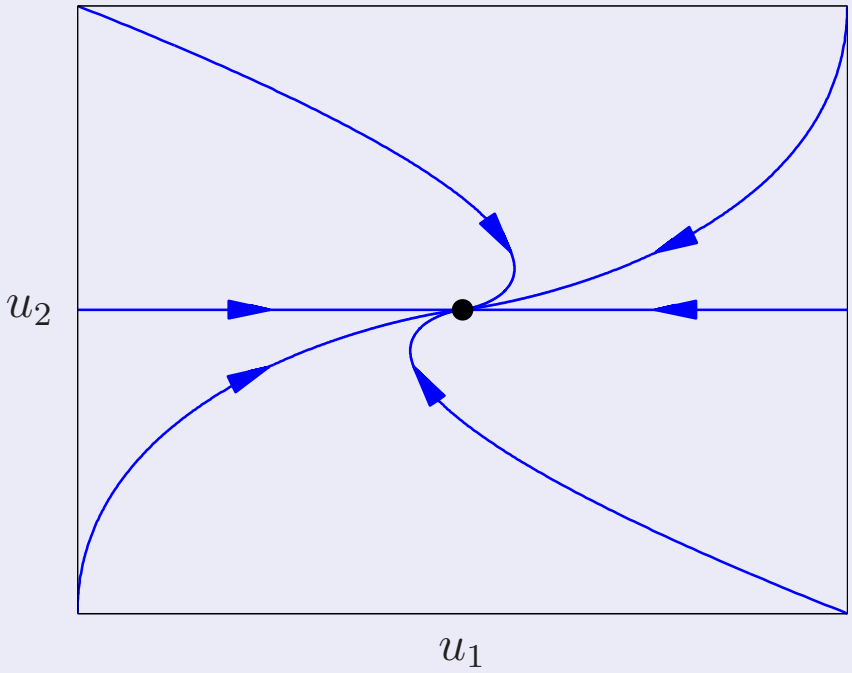


stabil, $\lambda, \varrho < 0$

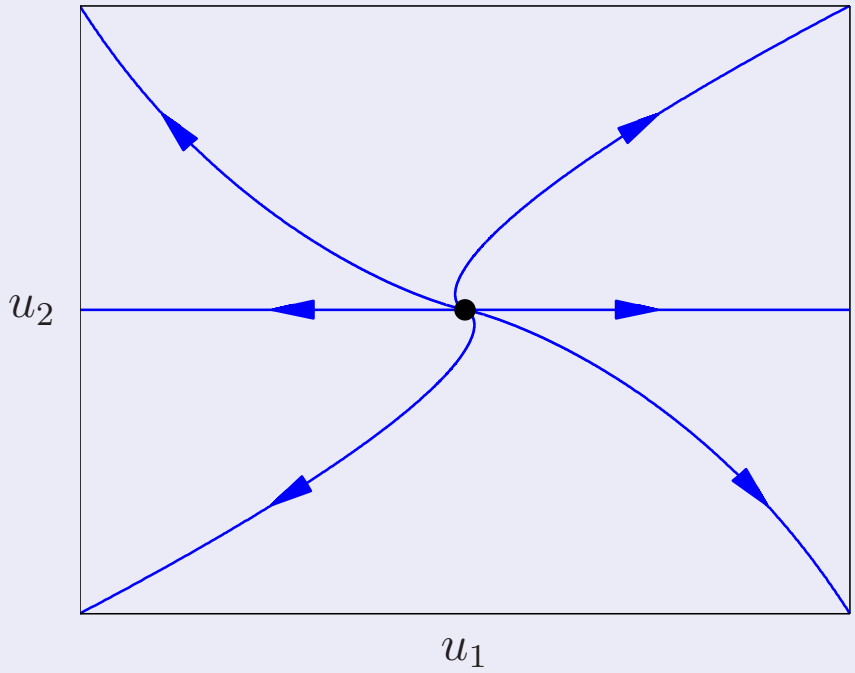


instabil, $\lambda, \varrho > 0$

Existiert keine Basis aus Eigenvektoren von A ($s = 1$), so spricht man von einem entarteten Knoten.

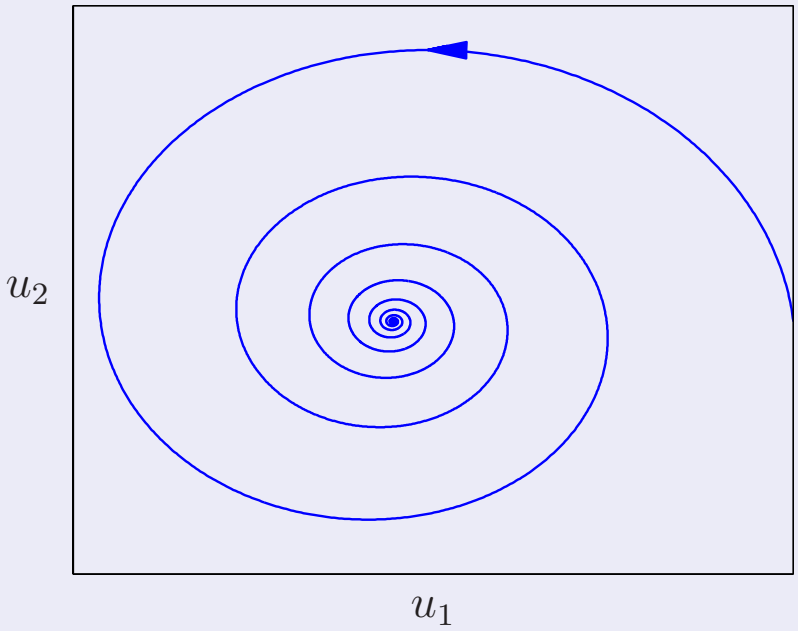


stabil, $\lambda < 0$

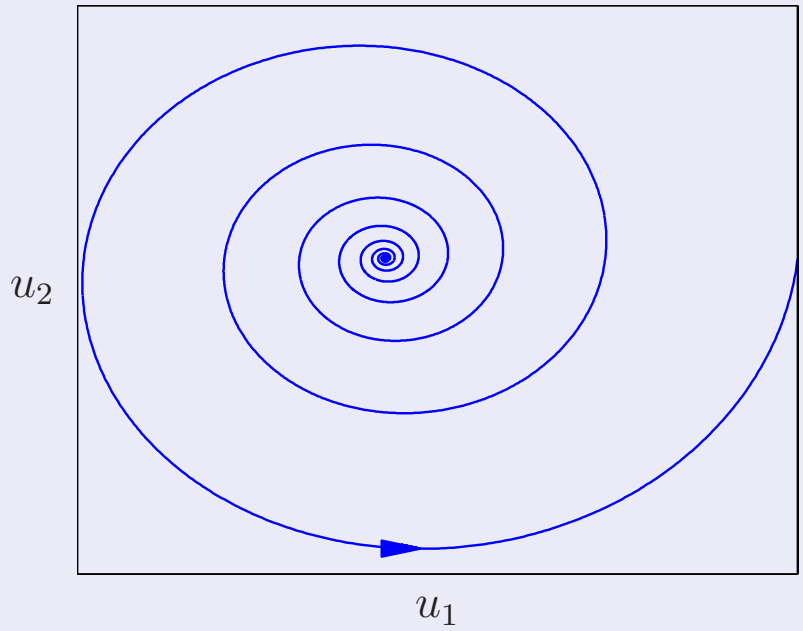


instabil, $\lambda > 0$

- Spirale: $\lambda = r + \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $r\omega \neq 0$

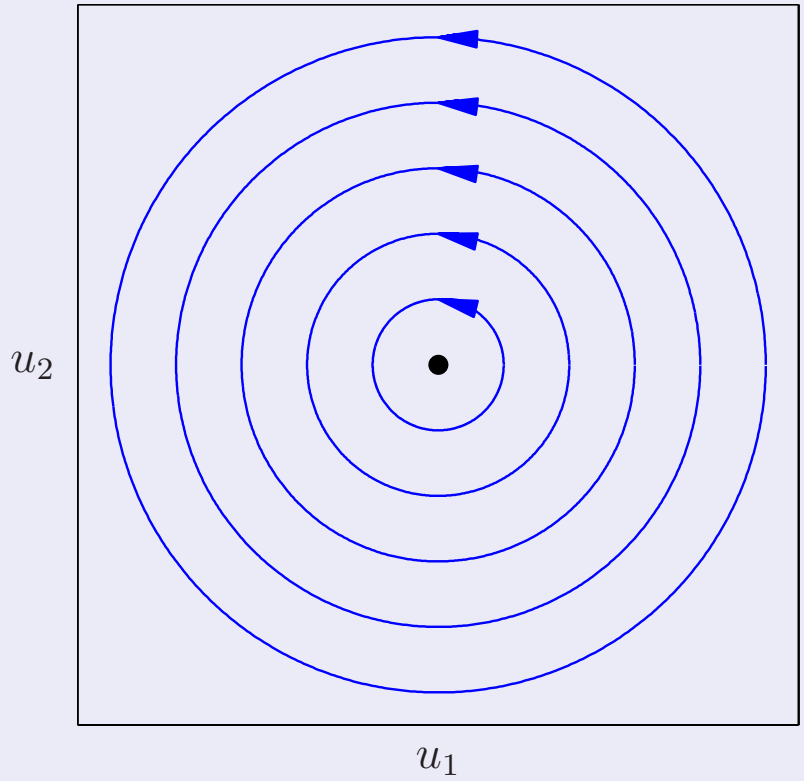


stabil, $r < 0$

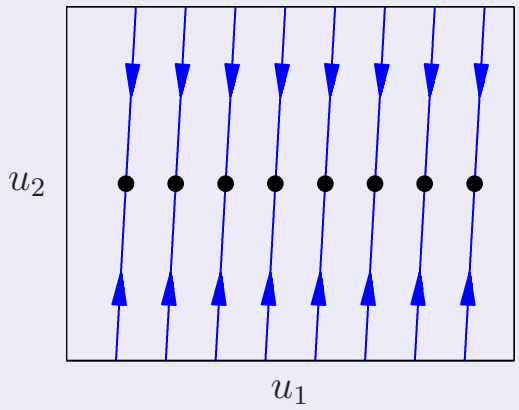


instabil, $r > 0$

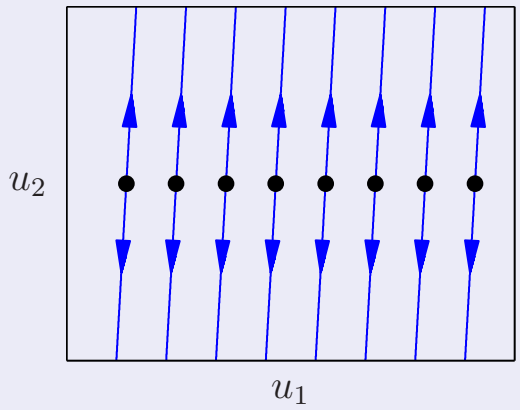
- Zentrum: $\lambda = \mathrm{i}\omega = \bar{\varrho}$, $\omega \neq 0$



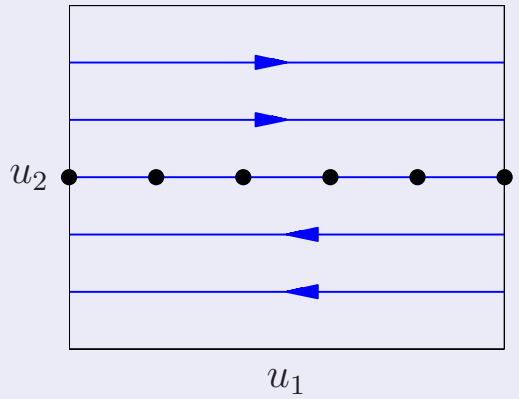
Zusätzlich gibt es noch degenerierte Fälle, bei denen ein Eigenwert null ist.



$\lambda = 0,\ \varrho < 0$



$\lambda = 0,\ \varrho > 0$



$\lambda = 0,\ \varrho = 0,\ s = 1$

In jedem dieser Fälle hat das Differentialgleichungssystem Ruhepunkte entlang der gesamten v_1-Achse.

Beweis:

Differentialgleichungssystem in Jordan-Form

$$v' = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & s \\ 0 & \varrho \end{pmatrix}}_{J} v \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} v_1' &= \lambda v_1 + s v_2 \\ v_2' &= \varrho v_2 \end{aligned}$$

(A) $s = 0$:
allgemeine Lösung

$$v_1 = \alpha e^{\lambda t},\ v_2 = \beta e^{\varrho t} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(B) $s = 1$ ($\Longrightarrow$ $\lambda = \varrho$):
allgemeine Lösung

$$v_1 = (\alpha + \beta t) e^{\lambda t},\ v_2 = \beta e^{\lambda t} \quad \text{mit } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Verschiedene Fälle

(i) $\lambda\varrho < 0$:

$\Longrightarrow$ $\lambda \neq \varrho$, beide Eigenwerte reell (Produkt komplex konjugierter Eigenwerte positiv), und $s = 0$

ein Eigenwert positiv

$\Longrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} |v(t)| = \infty$

$\Longrightarrow$ instabil

(ii) $\lambda\varrho > 0$, λ, ϱ reell:

entweder beide Eigenwerte positiv oder negativ;

entsprechend gilt $\lim_{t\to\infty} |v(t)| = \infty$ oder 0

$\Longrightarrow$ instabil oder stabil

Die Aussage gilt auch im degenerierten Fall $\lambda = \varrho$, $s = 1$ aufgrund der Form (B) der allgemeinen Lösung.

$$\lim_{t\to 0} te^{\lambda t} = 0 \quad \text{für } \lambda < 0$$

(iii) $\lambda = r + \mathrm{i}\omega = \overline{\varrho}$, $r\omega \neq 0$:
allgemeine Lösung

$$v(t) = \mathrm{e}^{rt} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \\ \beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \end{pmatrix}}_{p(t)}$$

$p(t)$ beschränkt $\quad\Longrightarrow\quad$ Vorzeichen von r entscheidet Stabilitätstyp
reelle Lösung spiralförmig

$$u(t) = \mathrm{e}^{rt}(a\,\mathrm{Re}(\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) + b\,\mathrm{Im}(\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}))$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und ξ dem (komplexen) Eigenvektor zu $\lambda = r + \mathrm{i}\omega$

(iv) $\lambda = \mathrm{i}\omega = \overline{\varrho} \neq 0$:
analog zu (iii), Lösungen beschränkt und periodisch (Ellipsen)

(v-a) $\lambda = 0$, $\varrho \neq 0$:
allgemeine Lösung ($s = 0$)

$$v(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \mathrm{e}^{\varrho t} \end{pmatrix}$$

$\varrho < 0$: $|v(t)|$ für $t \to \infty$ beschränkt $\quad \Longrightarrow \quad$ neutral stabil

$\varrho > 0$: $|v(t)|$ für $t \to \infty$ unbeschränkt $\quad \Longrightarrow \quad$ instabil

(v-b) $\lambda = 0 = \varrho$, $s = 1$:
allgemeine Lösung

$$v(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ \beta \end{pmatrix}$$

instabil

Stabilitätsdiagramm

Für ein zweidimensionales Differentialgleichungssystem

$$u' = Au, \quad u = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}},$$

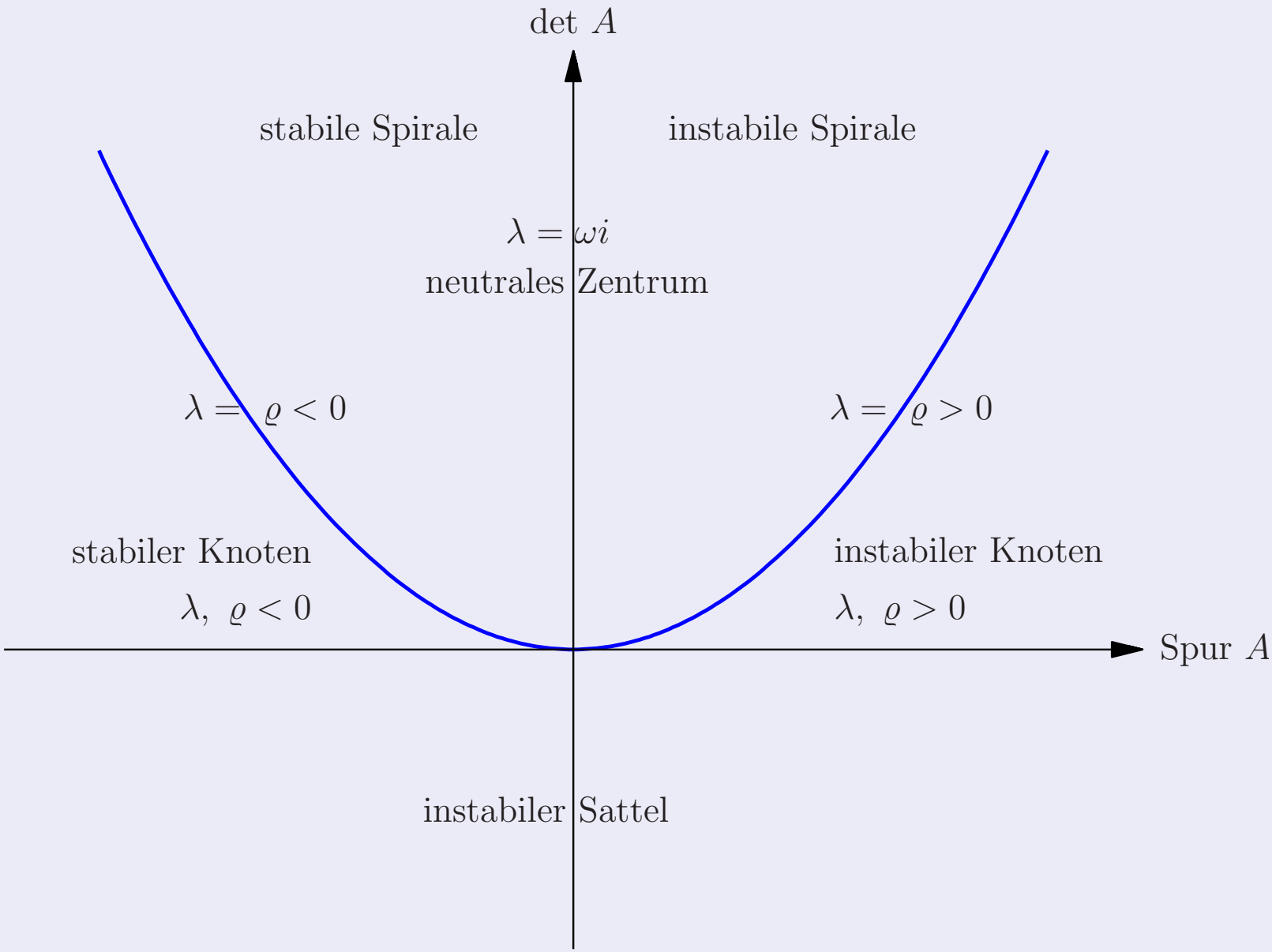
lässt sich Stabilität mit Hilfe der Determinante und Spur der Matrix A charakterisieren. Notwendig und hinreichend für Stabilität ist

$$\det A > 0, \ \operatorname{Spur} A < 0 .$$

Die Parabel

$$\det A = \left(\frac{\operatorname{Spur} A}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \lambda = \varrho$$

trennt die qualitativ verschiedenen Fälle Spirale und Knoten.
Bei dem Grenzfall $\lambda = \varrho$ handelt es sich um einen (gegebenenfalls entarteten) Knoten.


det A
stabile Spirale
instabile Spirale
$\lambda = \omega i$
neutrales Zentrum
$\lambda = \varrho < 0$
$\lambda = \varrho > 0$
stabiler Knoten
$\lambda,\ \varrho < 0$
instabiler Knoten
$\lambda,\ \varrho > 0$
Spur A
instabiler Sattel

Beweis:

$\lambda,\ \varrho$ Eigenwerte von $A \quad \Longrightarrow$

$$\det A = \lambda\varrho\ , \quad \text{Spur}\, A = \lambda + \varrho$$

- $\lambda, \varrho \in \mathbb{R}$:
  Stabilität, d.h. $\lambda, \varrho < 0 \quad \Leftrightarrow$

  $$\det A > 0 \quad \wedge \quad \text{Spur}\, A < 0$$

- $\lambda = r + \omega\mathrm{i},\ \varrho = r - \omega\mathrm{i}$:

  $$\det A = r^2 + \omega^2 > 0, \quad \text{Spur}\, A = 2r$$

  $\rightsquigarrow$ gleiches Kriterium für Stabilität

Übergang von komplexen zu reellen Eigenwerten $\Leftrightarrow$ $\omega \to 0$, d.h.

$$\lambda = \varrho \quad \Leftrightarrow \quad \det A = \left(\frac{\text{Spur}\, A}{2}\right)^2$$

(abgebildete Parabel $\widehat{=}$ Knoten mit doppeltem Eigenwert)

Beispiel:

Stabilität des Differentialgleichungssystems

$$u' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}}_{A} u$$

in Abhängigkeit von dem reellen Parameter α

Charakterisierung mit Hilfe von

$$\det A = 2, \quad \text{Spur } A = \alpha$$

(i) $\alpha < 0$:
stabil

- Knoten:
$$2 = \det A \leq (\text{Spur } A/2)^2 = (\alpha/2)^2 \,,$$
d.h. $\alpha \leq -2\sqrt{2}$
- Spirale:
$$\det A > (\text{Spur } A/2)^2 \,,$$
d.h. $-2\sqrt{2} < \alpha < 0$

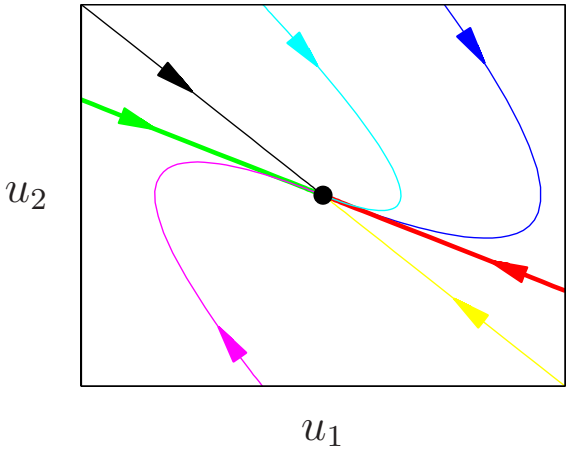
(ii) $\alpha = 0$:
neutrales Zentrum, Eigenwerte $\pm \mathrm{i}\sqrt{2}$

(iii) $\alpha > 0$:
instabil

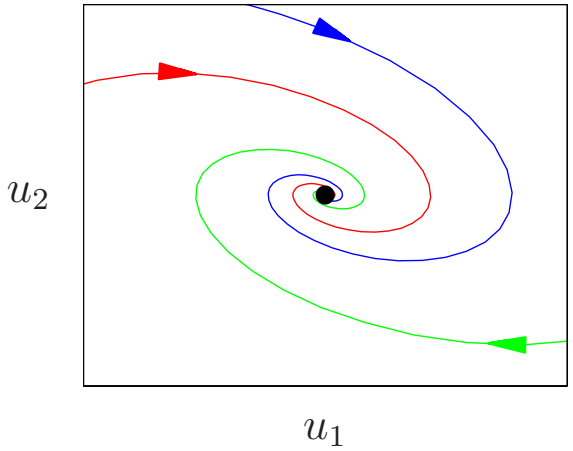
- Spirale:
$$0 < \alpha < 2\sqrt{2}$$

- Knoten:
$$2\sqrt{2} \leq \alpha$$

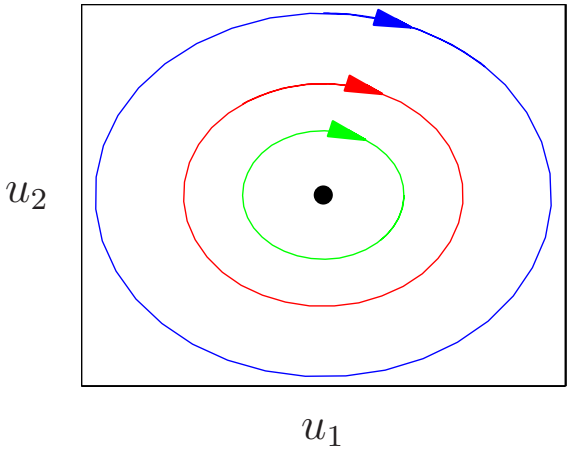
stabiler Knoten



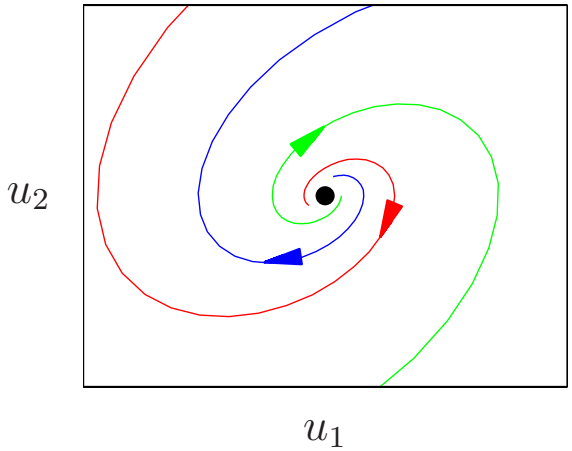
stabile Spirale



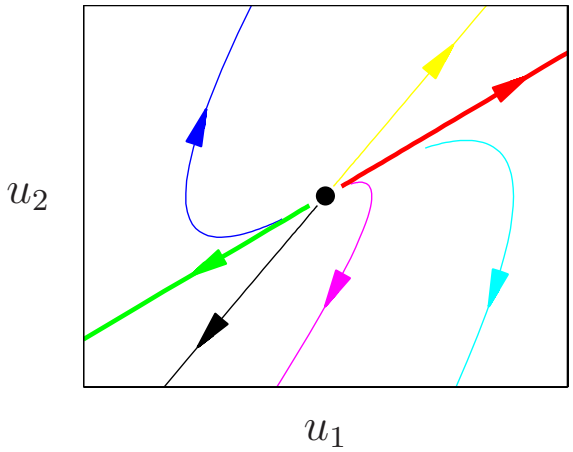
neutrales Zentrum



instabile Spirale



instabiler Knoten



Eigenlöungen $u = ve^{\lambda t}$ zu reellen Eigenwerten fett

Kritische Punkte eines autonomen Differentialgleichungssystems

Für eine autonome Differentialgleichung

$$u' = f(u), \quad u = (u_1, \ldots, u_n)^{\mathrm{t}},$$

bezeichnet man eine Nullstelle u_* von f als kritischen Punkt.
Sie entspricht einer konstanten Lösung ($u(t) = u_*$).

In einer Umgebung von u_* hat die Linearisierung die Form eines homogenen linearen Systems

$$v' = f'(u_*)v$$

mit $v(t) = u(t) - u_*$ und f' der Jacobi-Matrix von f.

Stabilität nichtlinearer Differentialgleichungssysteme

Ein kritischer Punkt u_* eines autonomen Differentialgleichungssystems

$$u' = f(u)$$

($f(u_*) = 0$) ist stabil, wenn alle Eigenwerte von $A = f'(u_*)$ negativen Realteil haben.
Es gibt dann eine Umgebung D von u_*, so dass

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = u_*$$

für alle Anfangswerte $u(0) \in D$.
Die Typeneinteilung (stabiler Knoten oder Spirale) erfolgt analog zu der des approximierenden linearen Differentialgleichungssystems

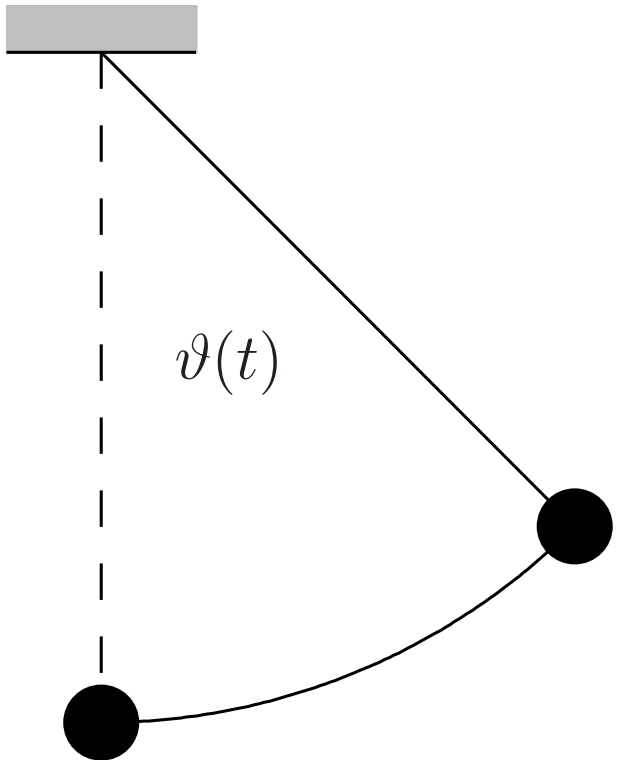
$$v' = Av, \quad v(t) = u(t) - u_* \,.$$

Beispiel:

Die Auslenkung eines gedämpften Pendels wird durch die Differentialgleichung

$$\vartheta'' = -\sin\vartheta - r\vartheta'$$

mit einem Reibungskoeffizienten $r > 0$ beschrieben.



Standardform mit $u = (\vartheta, \vartheta')^{\mathrm{t}}$

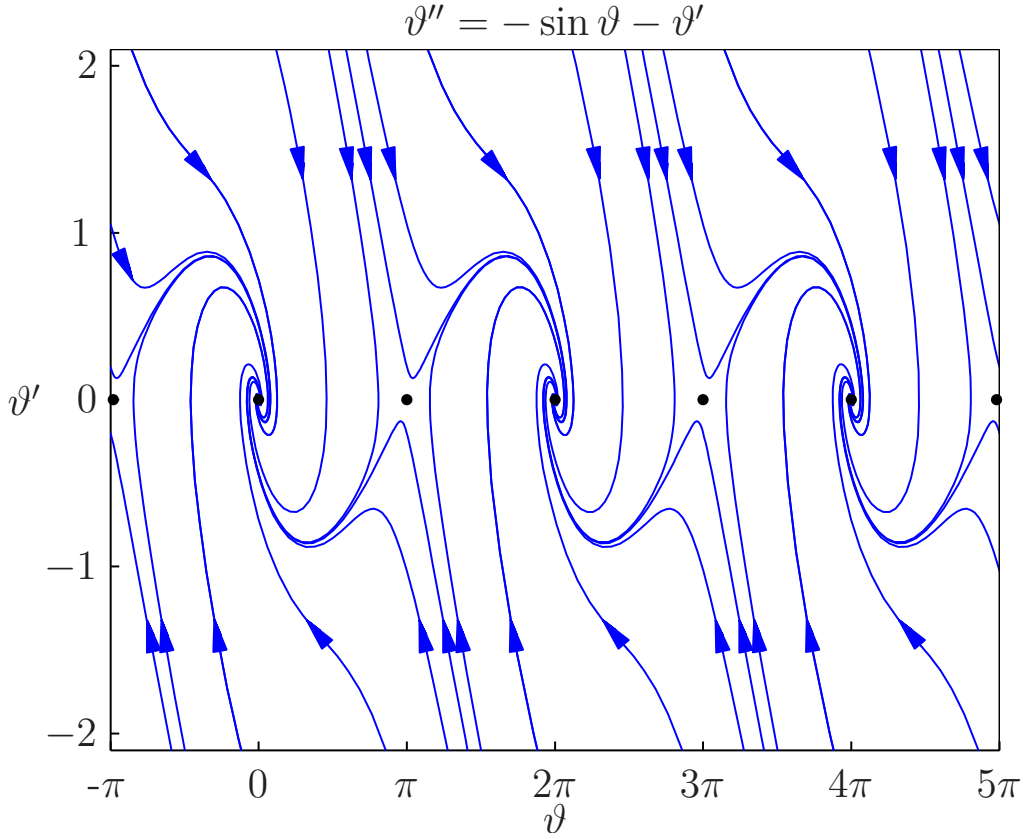
$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u_2 \\ -\sin u_1 - r u_2 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ kritische Punkte $(j\pi, 0)^{\mathrm{t}}$, $j \in \mathbb{Z}$
$(2k\pi, 0)^{\mathrm{t}}$: tiefste Position des Pendels (stabil)
$((2k+1)\pi, 0)^{\mathrm{t}}$:
höchste Position des Pendels (instabil)
rechnerische Bestätigung:

$$f' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos u_1 & -r \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Spur} f' = -r < 0, \quad \det f' = \cos u_1$$

$u_1 = 2k\pi \quad \Longrightarrow \quad \det f' = 1 > 0$, d.h. Stabilität
$u_1 = (2k+1)\pi \quad \Longrightarrow \quad \det f' = -1 < 0$, d.h. Eigenwerte der Jacobi-Matrix mit verschiedenem Vorzeichen (instabiler Sattel)



Typ der stabilen kritischen Punkte

Spirale: $1 = \det f' > \left(\frac{\text{Spur } f'}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad r < 2$

Knoten: $r \geq 2$

Beispiel:

Das Wachstum zweier konkurrierender Spezies kann durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= u(1 - \alpha u - \beta v)\,, \\ v' &= v(1 - \gamma u - \varrho v) \end{aligned}$$

mit Parametern $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ und $\alpha, \varrho > 0$ beschrieben werden.

Der kritische Punkt (u_*, v_*) mit $u_*, v_* > 0$ erfüllt

$$\begin{aligned} 1 - \alpha u_* - \beta v_* &= 0 \\ 1 - \gamma u_* - \varrho v_* &= 0 \end{aligned}$$

Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Jacobi-Matrix

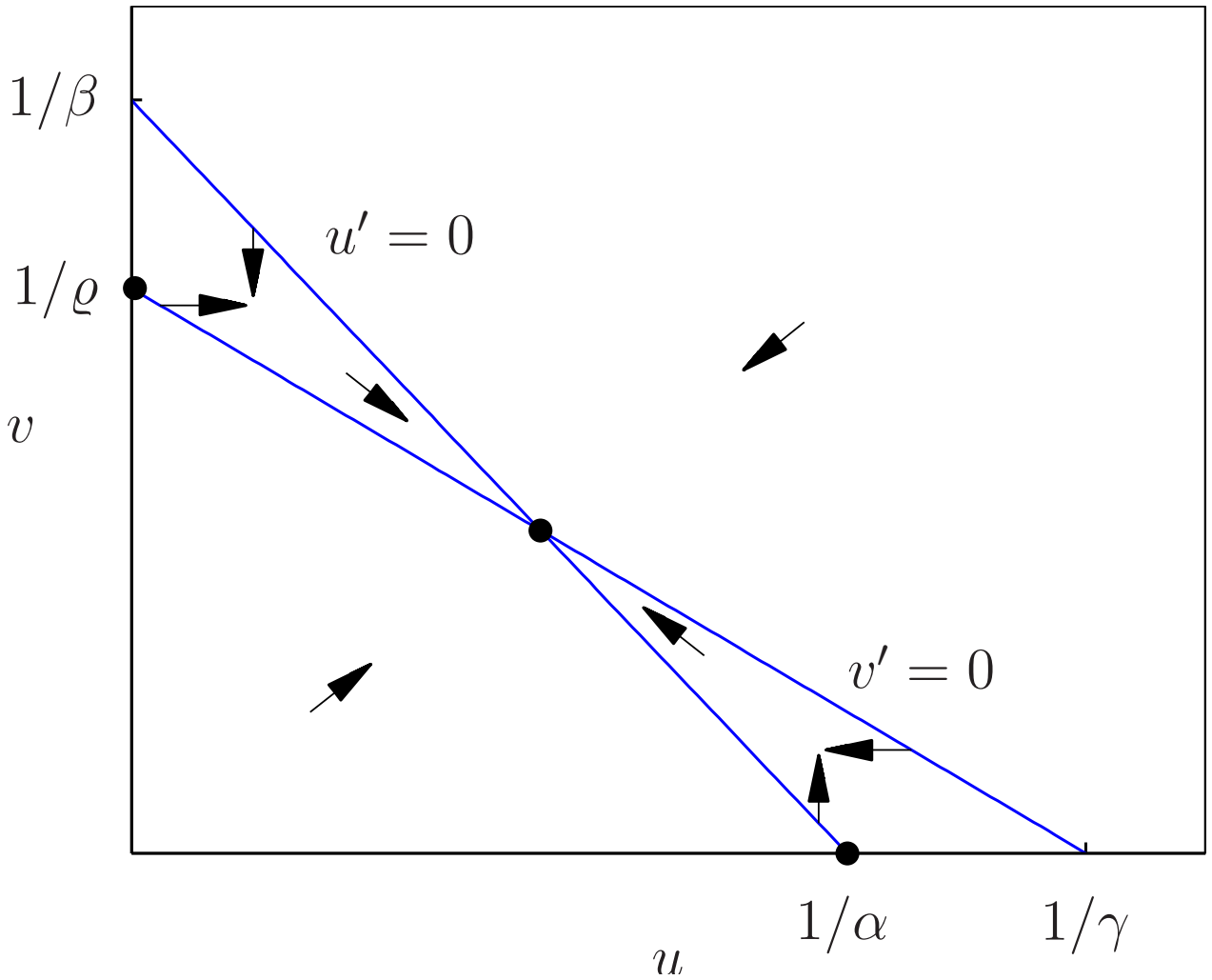
$$
\begin{aligned}
f'(u_*, v_*) &= \left(\begin{array}{cc} 1 - 2\alpha u - \beta v & -\beta u \\ -\gamma v & 1 - \gamma u - 2\varrho v \end{array} \right) \Bigg|_{(u_*, v_*)} \\
&= \left(\begin{array}{cc} -\alpha u_* & -\beta u_* \\ -\gamma v_* & -\varrho v_* \end{array} \right)
\end{aligned}
$$

Spur und Determinante

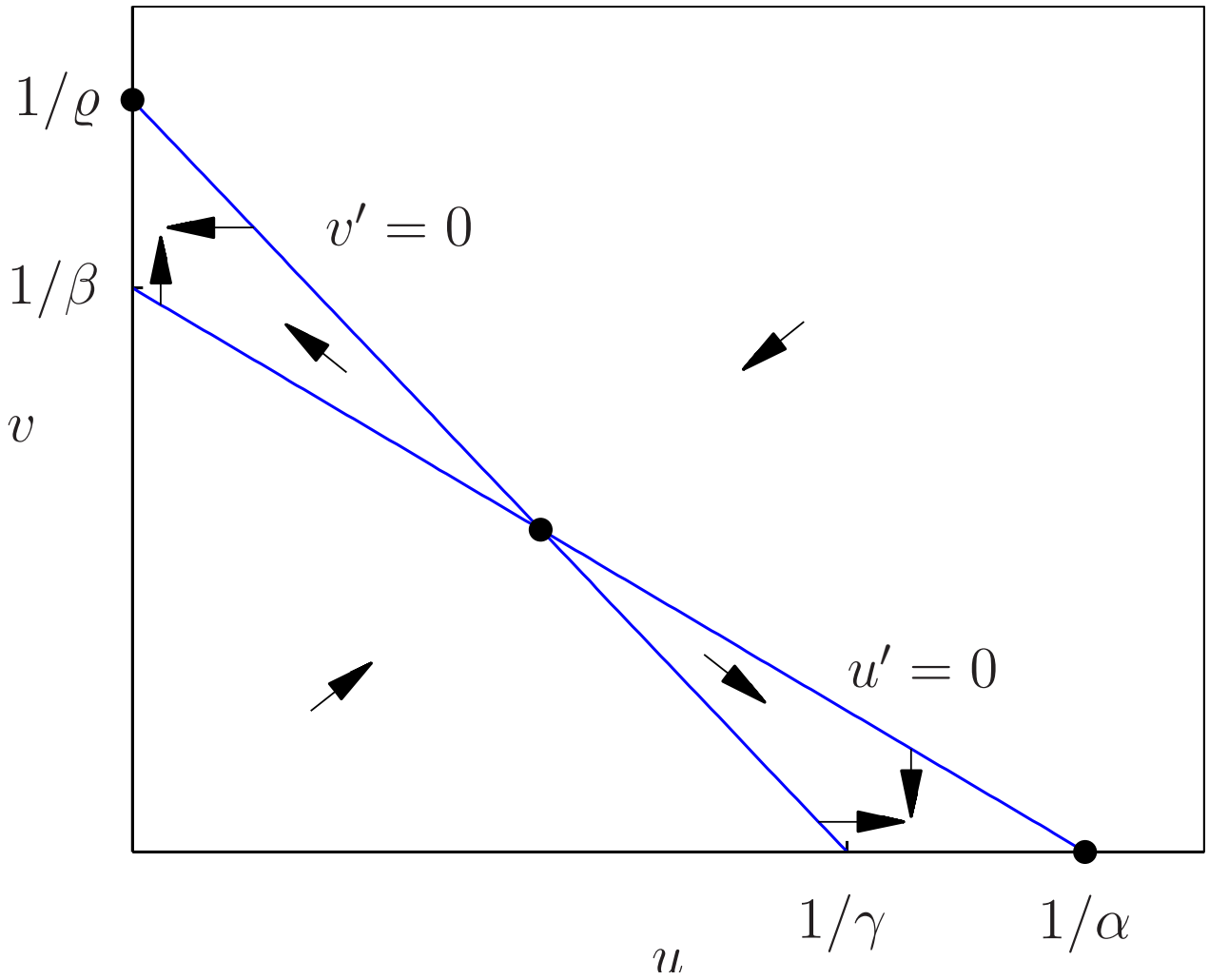
$$
\begin{aligned}
\text{Spur } f'(u_*, v_*) &= -\alpha u_* - \varrho v_* < 0 \\
\det f'(u_*, v_*) &= (\alpha\varrho - \beta\gamma) u_*
\end{aligned}
$$

(u_*, v_*) stabil genau dann wenn $\alpha\varrho - \beta\gamma > 0$

(i) Gleiche Ressourcen ($\beta, \gamma > 0$):

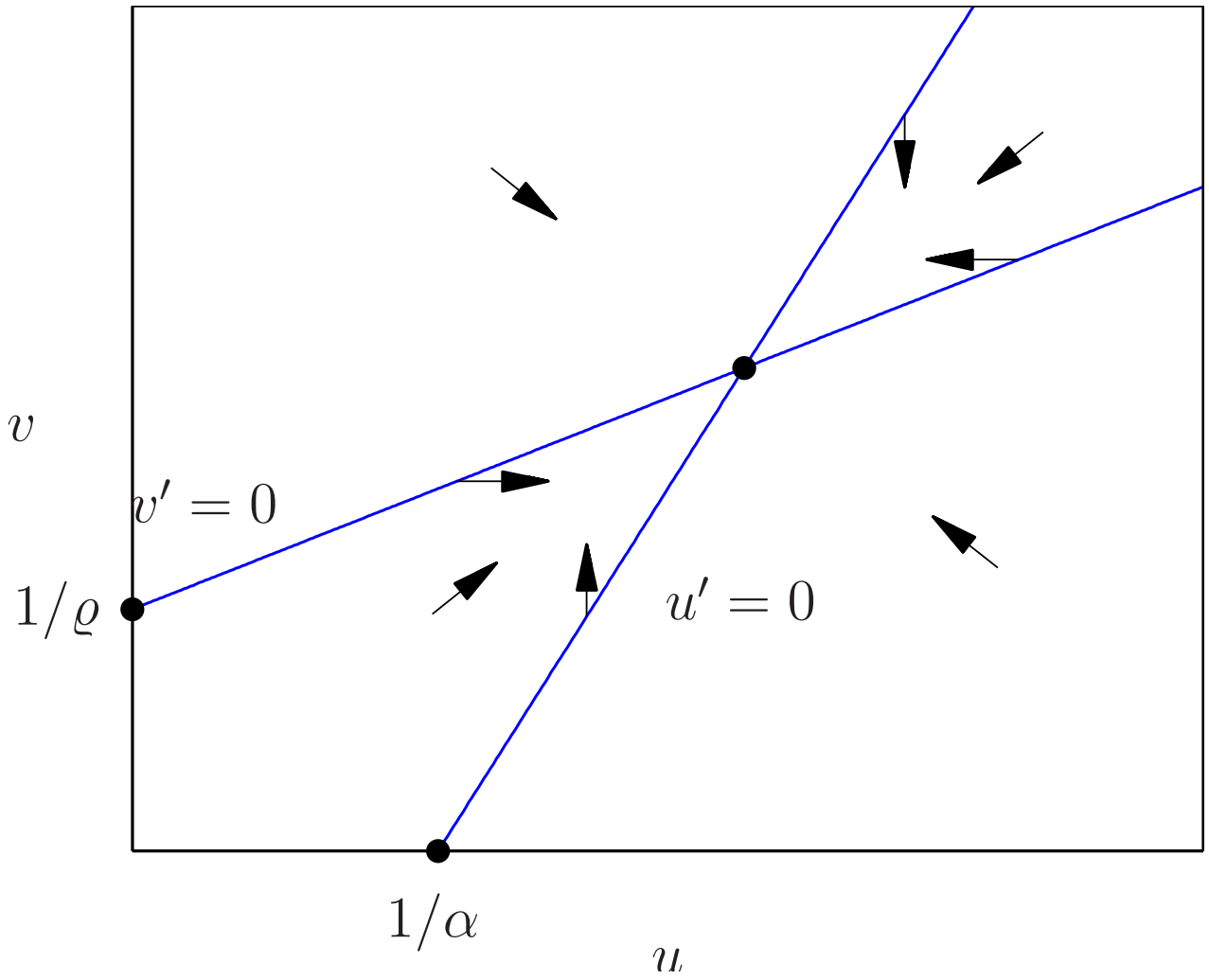


stabiler kritischer Punkt für $\alpha > \gamma$ und $\beta < \varrho$



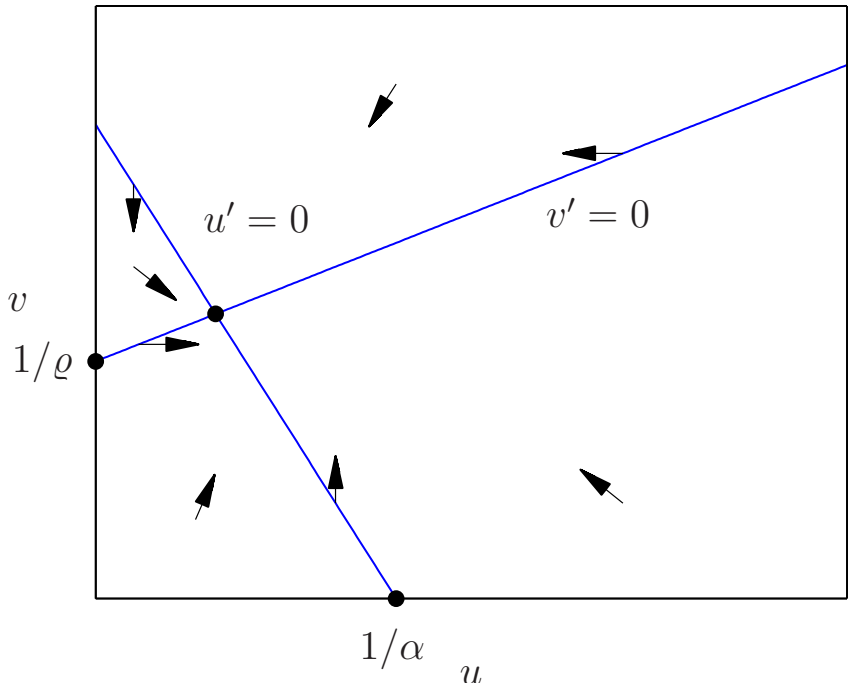
instabiler kritischer Punkt für $\alpha < \gamma$ und $\beta > \varrho$

(iii) Gegenseitige Hilfe ($\beta, \gamma < 0$)



stabiler kritischer Punkt für $\alpha\varrho > \beta\gamma$

(iv) Raubtier-Beute ($\beta\gamma < 0$):



$\beta > 0, \gamma < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ v lebt von u
stabiler kritischer Punkt

Laplace-Transformation

Ist $u(t)\exp(-at)$ auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar, so existiert das Integral

$$U(s) = \int_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt$$

für $\operatorname{Re} s \geq a$ und wird als Laplace-Transformation bezeichnet: $U = \mathcal{L}u$.

Der Operator $\mathcal{L} : u \mapsto U = \mathcal{L}u$ ist linear und injektiv, d.h.

$$\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v, \quad \mathcal{L}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}u$$

und

$$\mathcal{L}u = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 0\,.$$

Inverse Laplace-Transformation

Ist $u(t)\exp(-at)$ auf $[0,\infty)$ absolut integrierbar, so kann die inverse Laplace-Transformation $U = \mathcal{L}u \mapsto u$ durch

$$u(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{b-\mathrm{i}\infty}^{b+\mathrm{i}\infty} U(s)\exp(st)\,ds, \quad b \geq a\,,$$

berechnet werden.

Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen

Für die Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen gilt

$$u(t) = t^n \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)\,.$$

Mit $a = \lambda + \mathrm{i}\omega$ erhält man insbesondere die Laplace-Transformation von trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)\cos(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \\ \exp(\lambda t)\sin(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\,. \end{aligned}$$

Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen

Für die Laplace-Transformation von Exponentialfunktionen gilt

$$u(t) = t^n \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)\,.$$

Mit $a = \lambda + \mathrm{i}\omega$ erhält man insbesondere die Laplace-Transformation von trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \exp(\lambda t)\cos(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2} \\ \exp(\lambda t)\sin(\omega t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}\,. \end{aligned}$$

Beweis:

$$U_n(s) = \int_0^\infty t^n \exp(-(s-a)t)\, dt$$

partielle Integration $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} U_n(s) &= -\int_0^\infty n t^{n-1} \left(-\frac{1}{s-a}\right) \exp(-(s-a)t)\, dt = \frac{n}{s-a}\, U_{n-1}(s) \\ &= \cdots \\ &= \frac{n!}{(s-a)^n}\, U_0(s) \end{aligned}$$

mit

$$U_0(s) = \int_0^\infty \exp(-(s-a)t)\, dt = \frac{1}{s-a}$$

für $a = \lambda + \mathrm{i}\omega$,

$$u(t) = \exp(at) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = \frac{1}{s - \lambda - \mathrm{i}\omega} = \frac{(s - \lambda) + \mathrm{i}\omega}{(s - \lambda)^2 + \omega^2}$$

Bilden von Real- und Imaginärteil

$\rightsquigarrow$ Laplace-Transformation der trigonometrischen Funktionen

Beispiel:

Illustration der Transformationsregel für die Grundfunktionen

$$t^n e^{at}, \quad e^{\lambda t}\cos(\omega t), \quad e^{\lambda t}\sin(\omega t)$$

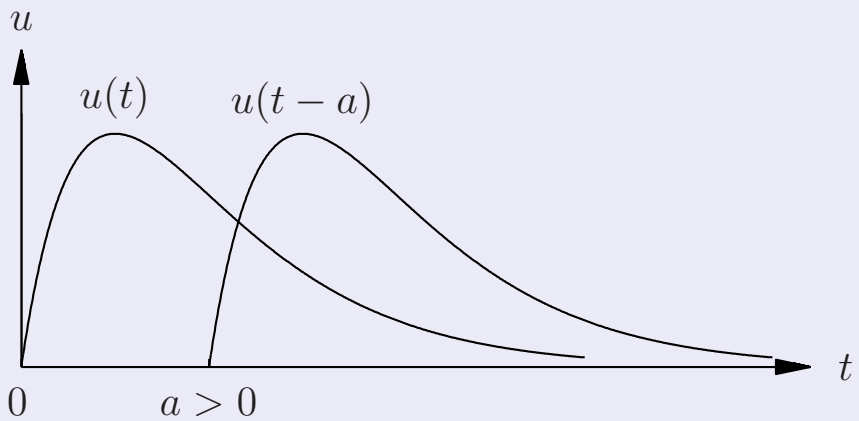
anhand einiger Beispiele

$u(t)$	$U(s)$
$2t^3 - 1$	$\frac{12}{s^4} - \frac{1}{s}$
$e^{4t}(t-5)$	$\frac{1}{(s-4)^2} - \frac{5}{s-4}$
$2\sin(3t)\cos(3t)$	$\frac{6}{s^2+36}$
$e^{-t}\cos(7t)$	$\frac{s+1}{(s+1)^2+49}$

Verschiebung und Skalierung bei Laplace-Transformation

Bezeichnet man, wie in der Abbildung illustriert, mit $u(\cdot - a)$ die um a nach rechts verschobene Funktion, so gilt für die Laplace-Transformation

$$u(t-a) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \exp(-as)U(s)\,.$$



Umgekehrt ist

$$\exp(at)u(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad U(s-a)\,.$$

Für die Laplace-Transformation einer skalierten Funktion gilt

$$u(at) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad a^{-1} U(s/a)\,.$$

Beweis:

(i) Verschiebung:

$$\int_0^\infty u(t-a)\exp(-st)\,dt = \int_{-a}^\infty u(\tau)\exp(-s(\tau+a))\,d\tau$$

$u(t) = 0$ für $t \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Transformationsregel

(ii) Multiplikation mit einer Exponentialfunktion:

$$\int_0^\infty \exp(at)u(t)\exp(-st)\,ds = \int_0^\infty u(t)\exp(-(s-a)t)\,ds = U(s-a)$$

(iii) Skalierung:

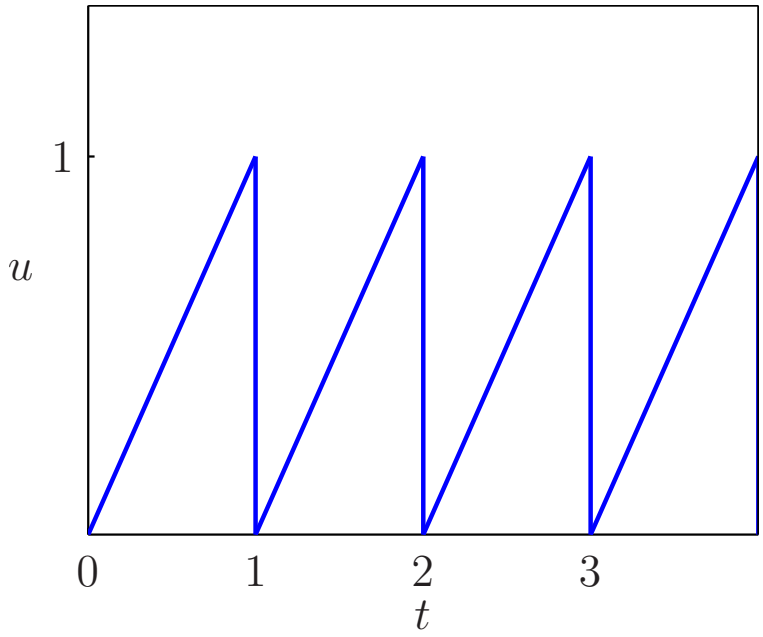
Substitution $\tau = at, dt = a^{-1}d\tau$ und $-st = -(s/a)\tau \quad \rightsquigarrow \quad$ Behauptung

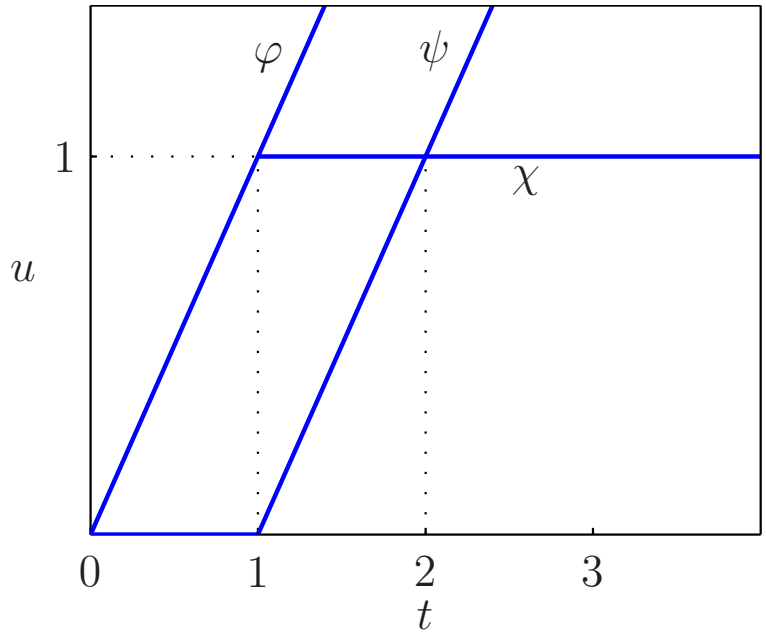
Beispiel:

Für $0 \leq t \leq 1$ wird die links abgebildete Funktion durch

$$u_0(t) = \underbrace{t}_{\varphi} - \underbrace{(t-1)_+}_{\psi} - \underbrace{(t-1)_+^0}_{\chi}, \quad x_+^j = \begin{cases} x^j & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben, wie rechts in der Abbildung illustriert ist.





Laplace-Transformation nach der Verschiebungsregel:

$$U_0(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s} = \frac{1 - \exp(-s) - s\exp(-s)}{s^2}$$

Regel für die Laplace-Transformation 1-periodischer Funktionen

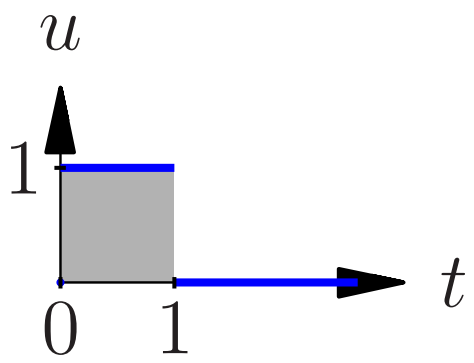
$\rightsquigarrow$ Transformation der Sägezahnfunktion

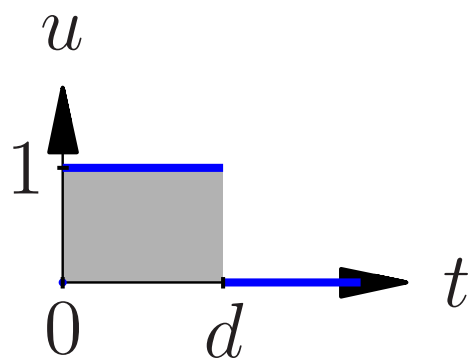
$$\begin{aligned} U(s) &= \frac{U_0(s)}{1 - \exp(-s)} = \frac{1}{s^2} - \frac{\exp(-s)}{s(1 - \exp(-s))} \\ &= \frac{1 - (1 + s)\exp(-s)}{s^2(1 - \exp(-s))} \end{aligned}$$

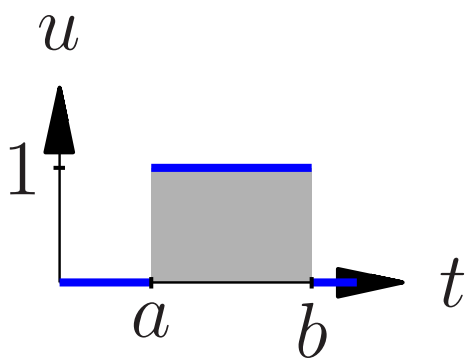
Beispiel:

Laplace-Transformation des Standardimpulses (links)

$$U(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-st}\,dt = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-st}}{s}\right]_0^1 = \frac{1-\mathrm{e}^{-s}}{s}$$







Skalierung $v(t) = u(t/d) \rightsquigarrow$

$$V(s) = d\,\frac{1-\mathrm{e}^{-ds}}{ds} = \frac{1-\mathrm{e}^{-ds}}{s}$$

Verschiebung $w(t) = v(t-a)$ mit $d = b - a$

$\rightsquigarrow$ Laplace-Transformierte der allgemeinen Impulsfunktion (rechts)

$$W(s) = \mathrm{e}^{-as}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-(b-a)s}}{s} = \frac{\exp(-as)-\exp(-bs)}{s}$$

Übereinstimmung mit der direkten Berechnung

$$W(s) = \int_a^b e^{-st}dt = \Big[-\frac{e^{-st}}{s}\Big]_a^b$$

Laplace-Transformation periodischer Funktionen

Ist u eine T-periodische Funktion, d.h. $u(t) = u(t+T)$, so folgt für die Laplace-Transformierte

$$U(s) = \frac{\int_0^T \exp(-st)u(t)\,dt}{1-\exp(-Ts)}\,.$$

Beweis:

$$U(s) = \int_0^\infty u(t)\exp(-st)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\int_{jT}^{(j+1)T} u(t)\exp(-st)\,dt}_{I_j}$$

Periodizität von u $\quad\Longrightarrow$

$$I_j = \int_0^T u(t)\exp(-s(t+jT))\,dt = \exp(-jTs)\underbrace{\int_0^T u(t)\exp(-st)\,dt}_{I_0}$$

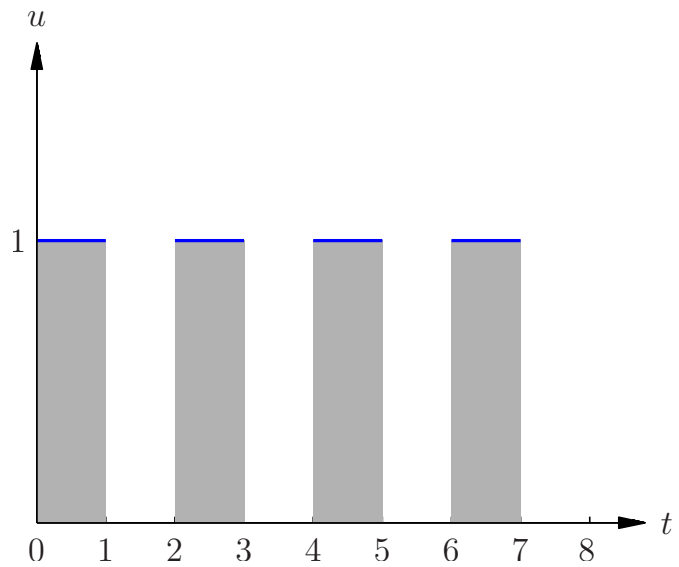
Formel für die geometrische Reihe $\quad\rightsquigarrow$

$$U(s) = I_0 \sum_{j=0}^{\infty} \exp(-jTs) = \frac{I_0}{1-\exp(-Ts)}$$

Beispiel:

Laplace-Transformation des Einheitsimpulses u:

$$U(s) = \int_0^1 \exp(-st)\,dt = \frac{1-\exp(-s)}{s}$$



2-periodische Fortsetzung

$$\tilde{U}(s) = \frac{U(s)}{1-\exp(-2s)} = \frac{1}{s(1+\exp(-s))}$$

Differentiation und Laplace-Transformation

Für die Laplace-Transformation von Ableitungen gelten die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} u'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} sU(s) - u(0)\,, \\ tu(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} -U'(s)\,. \end{aligned}$$

Für höhere Ableitungen gilt entsprechend

$$\begin{aligned} u^{(n)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} s^n U(s) - s^{n-1}u(0) - s^{n-2}u'(0) - \cdots - u^{(n-1)}(0)\,, \\ t^n u(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} (-1)^n U^{(n)}(s)\,. \end{aligned}$$

Die Laplace-Transformation der Stammfunktion

$$v(t) = \int_0^t u(r)\,dr$$

ist $V(s) = U(s)/s$.

Beweis:

(i) Differentiation:

$$u'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty u'(t)\mathrm{e}^{-ts}\,dt = \left[u(t)\mathrm{e}^{-st}\right]_0^\infty - \int_0^\infty u(t)(-s)\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

$[\ldots]_0^\infty = -u(0) \quad \rightsquigarrow \quad$ behauptete Formel

(ii) Multiplikation:

$$tu(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \int_0^\infty u(t)t\mathrm{e}^{-st}\,dt = -\frac{d}{ds}\int_0^\infty u(t)\mathrm{e}^{-st}\,dt$$

mehrfache Anwendung der Formeln

$\rightsquigarrow$ Formeln für höhere Ableitungen und Potenzen

(iii) Integration:

$$v'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} sV(s) - v(0) = sV(s)$$

$\rightsquigarrow$ behauptete Formel für V, da

$$v' = u, \quad u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)$$

also $U(s) = sV(s)$

Faltung und Laplace-Transformation

Für die Laplace-Transformation der Faltung zweier Funktionen

$$(u \star v)(t) = \int_0^t v(t-r)u(r)\,dr$$

gilt

$$\mathcal{L}(u \star v) = (\mathcal{L}u)(\mathcal{L}v)\,.$$

Beweis:

Vertauschen der Integrationsgrenzen $\rightsquigarrow$

$$
\begin{aligned}
(u \star v)(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad & \int_0^\infty \int_0^t v(t-r)u(r)\exp(-st)\,dr\,dt \\
= \quad & \int_0^\infty \int_r^\infty v(t-r)u(r)\exp(-s(t-r))\exp(-sr)\,dt\,dr \\
= \quad & \int_0^\infty \int_0^\infty v(\tau)u(r)\exp(-s\tau)\exp(-sr)\,d\tau\,dr \\
= \quad & U(s)V(s)
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Laplace-Transformation der Faltung von $u = \exp(at)$ und $v = \exp(bt)$

$$(u \star v)(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)V(s) = \frac{1}{s-a}\frac{1}{s-b} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}\right)$$

inverse Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

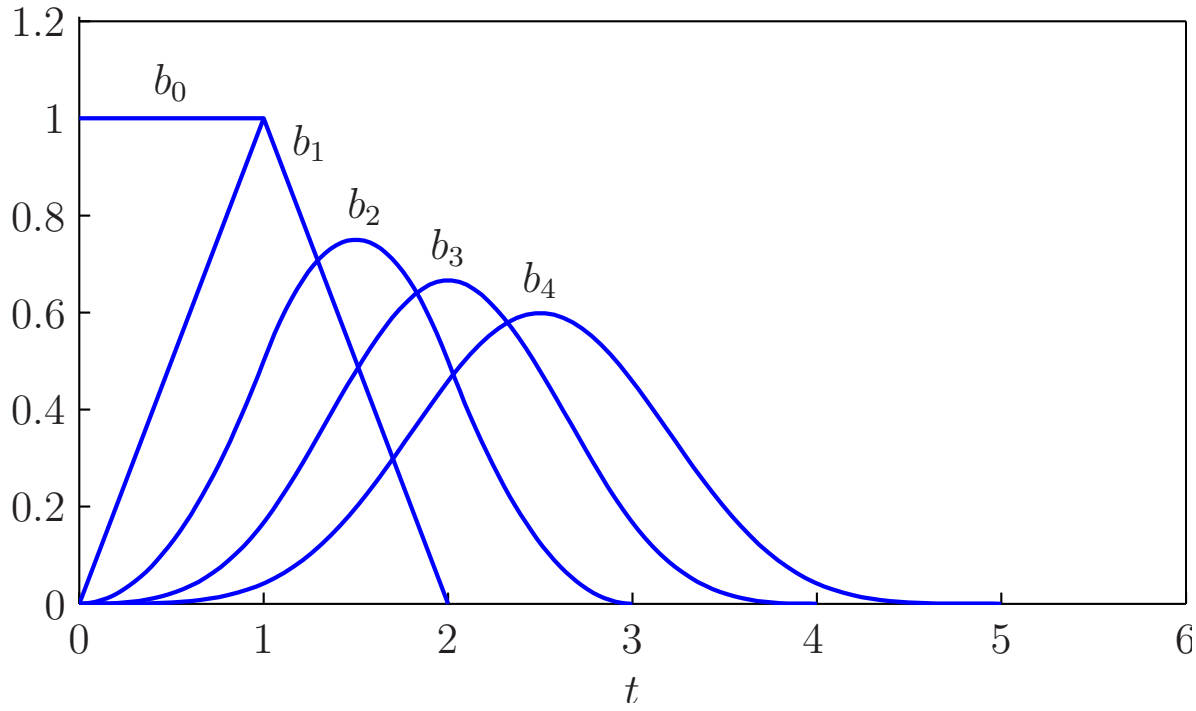
$$(u \star v)(t) = \frac{\exp(at) - \exp(bt)}{a-b}$$

Übereinstimmung mit der direkten Berechnung:

$$\begin{aligned}(u \star v)(t) &= \int_0^t \exp(a(t-r))\exp(br)\,dr \\ &= \exp(at)\left[\frac{\exp((b-a)r)}{b-a}\right]_0^t \\ &= \frac{\exp(bt) - \exp(at)}{b-a}\end{aligned}$$

Beispiel:

Mit Hilfe der abgebildeten B-Splines b_j kann eine Basis für die stückweisen Polynome vom Grad $\leq j$ gebildet werden.



rekursive Definition durch Faltung ausgehend von der charakteristischen Funktion b_0 des Intervalls $[0,1]$:

$$b_{j+1}(t) = (b_j \star b_0)(t) = \int_0^t b_j(t-r)b_0(r)\,dr = \int_0^1 b_j(t-r)\,dr$$

denn $b_j(s) = 0$ für $s = t - r \leq 0$
Laplace-Transformation der B-Splines:

$$b_0(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \frac{1-\exp(-s)}{s},$$

$$b_j(t) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}} \quad \left(\frac{1-\exp(-s)}{s}\right)^{j+1} = s^{-(j+1)} \sum_{k=0}^{j+1} c_k \exp(-ks)$$

mit

$$c_k = (-1)^k \begin{pmatrix} j+1 \\ k \end{pmatrix}$$

Rücktransformation mit Hilfe der Verschiebungsregel $\rightsquigarrow$

$$b_j(t) = \sum_{k=0}^{j+1} c_k \frac{1}{j!}(t-k)_+^j$$

mit den sogenannten abgebrochenen Potenzen

$$(t-k)_+^j = \begin{cases} 0 & : \quad t < k \\ (t-k)^j & : \quad t \geq k \end{cases}$$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Laplace-Transformierte der Lösung u des Anfangswertproblems

$$u' + pu = f(t), \quad u(0) = a$$

ist

$$U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)\,.$$

Die Lösung kann also durch Faltung mit der inversen Transformation $\varphi(t) = \exp(-pt)$ von $\Phi(s) = (s+p)^{-1}$ berechnet werden,

$$u = \underbrace{a\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$.

Beweis:

Laplace-Transformation der Differentialgleichung

$$sU(s) - a + pU(s) = F(s) \longrightarrow U(s) = \frac{1}{s+p}(F(s) + a)$$

Darstellung von u durch inverse Laplace-Transformation

$$\varphi(t) = \exp(-pt) \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(s) = 1/(s+p)$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{F(s)}{s+p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \varphi \star f$$

$$\frac{a}{s+p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} a\varphi$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' - u = \exp(t), \quad u(0) = 0$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$sU(s) - u(0) - U(s) = \frac{1}{s-1}$$

und nach Auflösen nach U

$$U(s) = \frac{1}{(s-1)^2} = -\frac{d}{ds}\frac{1}{s-1}$$

Formel für die inverse Transformation einer abgeleiteten Funktion

$$-\frac{d}{ds} \longrightarrow \text{Multiplikation mit } t$$

$\rightsquigarrow$

$$u(t) = t\exp(t)$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' - 3u = t\exp(2t)\ , \quad u(0) = a$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$sU(s) - a - 3U(s) = \frac{1}{(s-2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s-3}\left(\frac{1}{(s-2)^2} + a\right)$$

Partialbruchzerlegung von U

$$U(s) = \frac{a+1}{s-3} - \frac{1}{s-2} - \frac{1}{(s-2)^2}$$

inverse Laplace-Transformation der elementaren Terme $\rightsquigarrow$

$$u(t) = (a+1)\exp(3t) - \exp(2t) - t\exp(2t)$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u' + u = \cos(2t)\ , \quad u(0) = 3$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$sU(s) - 3 + U(s) = \frac{s}{s^2+4} \quad \Leftrightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s+1}\left(\frac{s}{s^2+4} + 3\right)$$

Rücktransformation der elementaren Terme

$$\Phi(s) = \frac{1}{s+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \varphi(t) = \mathrm{e}^{-t}, \quad \Psi(s) = \frac{s}{s^2+4} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \psi(t) = \cos(2t)$$

Faltungsregel $\Phi\Psi \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \varphi \star \psi \quad \rightsquigarrow$ inverse Laplace-Transformation

$$\begin{aligned} u(t) &= 3e^{-t} + \int_0^t e^{-(t-r)} \cos(2r)dr \\ &= \frac{14}{5}\exp(-t) + \frac{1}{5}\cos(2t) + \frac{2}{5}\sin(2t) \end{aligned}$$

Laplace-Transformation linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Die Laplace-Transformierte der Lösung u des Anfangswertproblems

$$u'' + pu' + qu = f(t), \quad u(0) = a,\ u'(0) = b$$

ist

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + ps + q}\left(F(s) + as + ap + b\right) .$$

Die Lösung kann also durch Faltung berechnet werden,

$$u = \underbrace{a\varphi' + (ap + b)\varphi}_{u_h} + \underbrace{\varphi \star f}_{u_p},$$

bzw. durch direkte Rücktransformation von $U(s)$.

Bezeichnen λ und ϱ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\Phi^{-1}(s) = s^2 + ps + q$, so gilt

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda t} - e^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}, & \lambda \neq \varrho \\ t e^{\lambda t}, & \lambda = \varrho\,. \end{cases}$$

Beweis:

Laplace-Transformation der Differentialgleichung

$$s^2 U(s) - su(0) - u'(0) + p(sU(s) - u(0)) + qU(s) = F(s)$$

$u(0) = a,\ u'(0) = b \quad \rightsquigarrow \quad$ Formel für U

(i) $\lambda \neq \varrho$:

Partialbruchzerlegung

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s-\lambda)(s-\varrho)} = \frac{1}{\lambda - \varrho}\left(\frac{1}{s-\lambda} - \frac{1}{s-\varrho}\right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \varphi(t) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\varrho t}}{\lambda - \varrho}$$

Rücktransformation der einzelnen Terme mit Hilfe der Faltungsregel, Transformation einer Ableitung und Linearität $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \Phi(s)\,F(s) &\longrightarrow (\varphi \star f)(t) \\ \Phi(s)\,as &\longrightarrow a\varphi'(t), \quad \text{da } \varphi(0) = 0 \\ \Phi(s)\,(ap+b) &\longrightarrow (ap+b)\varphi(t) \end{aligned}$$

(ii) $\lambda = \varrho$:

$$\varphi(t) = \lim_{\varrho \to \lambda} \frac{\mathrm{e}^{\lambda t} - \mathrm{e}^{\varrho t}}{\lambda - \varrho} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{\varrho \to \lambda} \frac{-t\mathrm{e}^{\varrho t}}{-1} = t\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Rücktransformation analog

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' - 3u' + 2u = 1\,, \quad u(0) = 0\,, \quad u'(0) = 1$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$U(s) = \frac{1}{s^2 - 3s + 2}\left(\frac{1}{s} + 1\right)$$

Partialbruchzerlegung

$$U(s) = \frac{3}{2}\frac{1}{s-2} - 2\,\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s}$$

inverse Laplace-Transformation der elementaren Terme $\rightsquigarrow$

$$u(t) = \frac{3}{2}\exp(2t) - 2\exp(t) + \frac{1}{2}$$

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$u'' + 2u' + 5u = \exp(-3t)\ , \quad u(0) = 0,\ u'(0) = 0$$

Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$U(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}\ \frac{1}{s+3}$$

Partialbruchzerlegung

$$U(s) = \frac{1}{8}\frac{1}{s+3} - \frac{1}{8}\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{8}\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

inverse Laplace-Transformation der elementaren Terme $\rightsquigarrow$

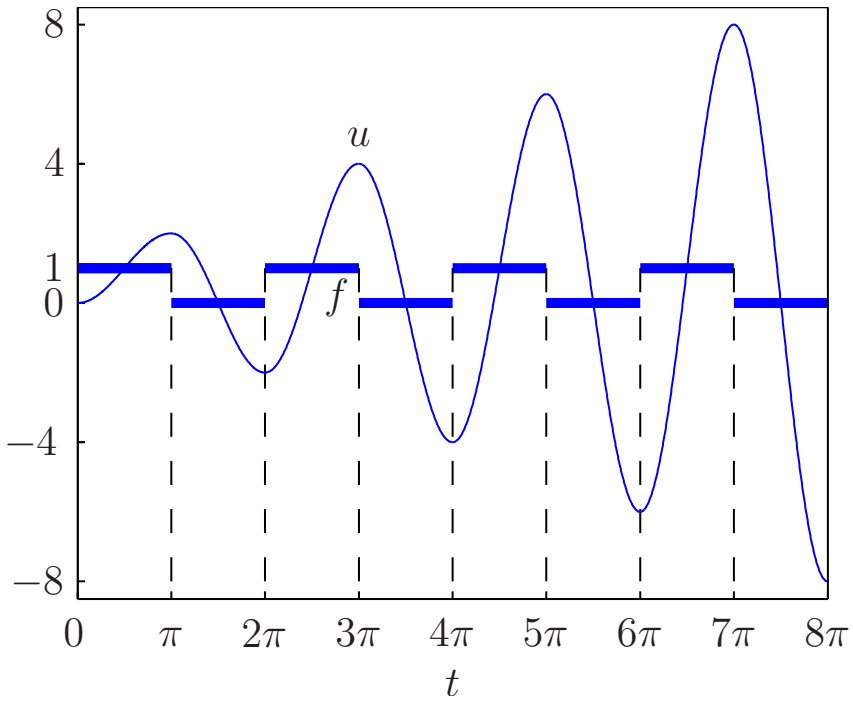
$$u(t) = \frac{1}{8}\exp(-3t) - \frac{1}{8}\exp(-t)\cos(2t) + \frac{1}{8}\exp(-t)\sin(2t)$$

Beispiel:

Es soll das Anfangswertproblem

$$u'' + u = f\,, \quad u(0) = u'(0) = 0$$

für die abgebildete stückweise konstante Impulsfunktion f gelöst werden.



Laplace-Transformation $\rightsquigarrow$

$$(s^2 + 1)\, U(s) = F(s)$$

$\Leftrightarrow$

$$U(s) = \underbrace{\frac{1}{s^2 + 1}}_{\Phi(s)}\, F(s)$$

$\varphi(t) = \sin t$, Faltungsregel $\rightsquigarrow$

$$u(t) = \int_0^t \sin(t - s) f(s)\, ds$$

Fallunterscheidung aufgrund der stückweisen Definition von f

(i) $t \in [2\ell\pi, (2\ell+1)\pi]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=0}^{\ell-1} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin(t-s)ds + \int_{2\ell\pi}^{t} \sin(t-s)ds \\ &= \sum_{k=0}^{\ell-1} (\cos(t-\pi) - \cos t) + (1 - \cos t) \\ &= 1 - (2\ell+1)\cos t \end{aligned}$$

denn $\cos(t-\pi) = -\cos t$

(ii) $t \in [(2\ell+1)\pi, (2\ell+2)\pi]$:

Ersetzen von $\int_{2\ell\pi}^{t} \ldots$ durch $\int_{2\ell\pi}^{(2\ell+1)\pi} \ldots \quad \rightsquigarrow$

$$u(t) = -(2\ell+2)\cos t$$

lineares Wachstum der Lösung wie im Resonanzfall