Differentialgleichung erster Ordnung

Eine Differentialgleichung erster Ordnung für eine Funktion $y(x)$ hat die Form

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

wobei das Argument x oft weggelassen wird ($y' = f(x, y)$).
Die Lösung ist im Allgemeinen nur bis auf eine Konstante bestimmt, die durch eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

festgelegt werden kann.

Beispiel:

Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x}(1-y)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$y = \frac{x}{x+c}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ y nur bis auf eine Integrationskonstante c bestimmt
$\rightsquigarrow$ Konstante durch Anfangswert festgelegt
(vgl. Bilden von Stammfunktionen $f(x, y(x)) = g(x)$)

Anfangswert $y(1) = 2$ $\rightsquigarrow$

$$c = -\frac{1}{2}, \quad y(x) = \frac{2x}{2x-1}$$

$x_0 = 0$ $\rightsquigarrow$ Singularität
einziger möglicher Anfangswert $y_0 = 0$, Lösungsschar nicht eingeschränkt

Beispiel:

Wachstumsmodell: proportionaler Zuwachs bzw. Abnahme

$$u(t + \Delta t) = u(t) + \Delta t \; p \; u(t)$$

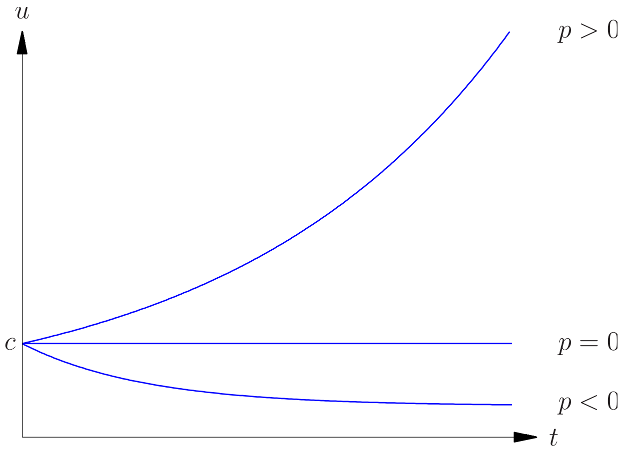
$\Delta t \to 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Differentialgleichung

$$u'(t) = pu(t)$$

(u' proportional zu u)
Lösung

$$u(t) = u(0) \exp(pt)$$

exponentielles Wachstum

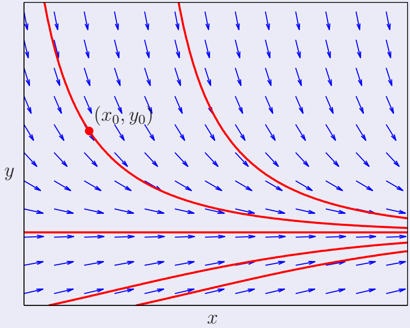

u
$p > 0$
c
$p = 0$
$p < 0$
t

Richtungsfeld

Das Richtungsfeld einer Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

ordnet jedem Punkt der xy-Ebene eine Tangente mit Steigung f zu.



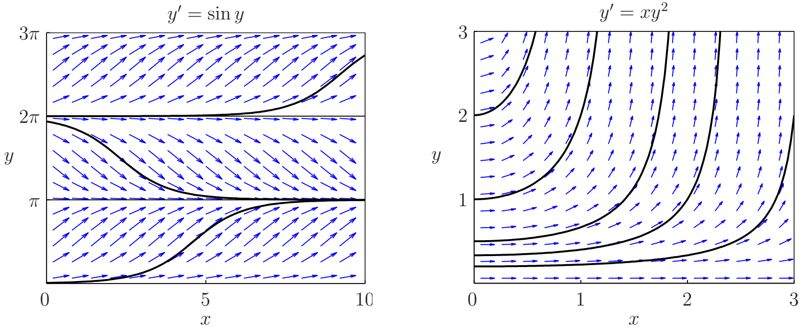
Die Graphen der Lösungen sind in jedem Punkt (x, y) zum Richtungsfeld tangential.
Ist eine Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0$$

gegeben, so verläuft der Graph durch den Punkt (x_0, y_0).

Beispiel:

Die Abbildung zeigt zwei Beispiele von Richtungsfeldern, in denen jeweils einige Lösungen eingezeichnet sind.



$\rightsquigarrow$ qualitatives Verhalten der Lösungen erkennbar

(i) Linke Differentialgleichung:
Rechte Seite hängt nicht explizit von x ab.
$\rightsquigarrow$ Lösungen sind translationsinvariant, d.h. ist $y(x)$ Lösung, so auch $y(x+c)$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Nullstellen des Sinus $\rightsquigarrow$ konstante Lösungen $y(x) = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$

- anziehend für $j = 2k+1$,
  d.h. für Lösungen y $y(0) \in (2k\pi, (2k+2)\pi)$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} y(x) - (2k+1)\pi = 0$$

- abstoßend für $j = 2k$

(ii) Rechte Differentialgleichung:
Die Steigungen nehmen für große Werte von x und y deutlich zu.
$\rightsquigarrow$ stark wachsende Lösungen
Für $y(0) > 0$ existiert jede Lösung nur auf einem endlichen Intervall.