Bernoullische Differentialgleichung

Die Differentialgleichung

$$u' + pu = qu^k, \quad k \neq 0, 1\,,$$

lässt sich durch die Substitution

$$y = u^{1-k}, \quad y' = (1-k)u^{-k}u'$$

in die lineare Differentialgleichung

$$\frac{1}{1-k}\,y' = -py + q$$

überführen.

Speziell erhält man für konstantes p und q

$$y = \frac{q}{p} + c\exp(p(k-1)x)$$

bzw.

$$u = \left(\frac{q}{p} + c\exp(p(k-1)x)\right)^{\frac{1}{1-k}}$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Es soll die Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung

$$u' + 3u = xu^2,\ u(0) = 1\,,$$

bestimmt werden.
Substitution $y = 1/u$ bzw. $u = 1/y \quad \rightsquigarrow$

$$-y^{-2}y' + 3y^{-1} = xy^{-2} \quad \Leftrightarrow \quad y' = 3y - x$$

$\rightsquigarrow$ allgemeine Lösung

$$y = \int_0^x e^{3x-3s}(-s)ds + ce^{3x}$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1/u(0) = 1$ und Integration $\implies$ $c = 1$
und

$$y = \frac{8}{9}e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \quad \rightsquigarrow \quad u = \frac{9}{8e^{3x} + 3x + 1}$$