

Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Eine Differentialgleichung

$$y' = f(y/x),$$

bei der die rechte Seite nur vom Quotienten y/x abhängt, lässt sich durch die Substitution

$$xz(x) = y(x), \quad z + xz' = f(z)$$

in die separable Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

überführen.

Beispiel:

Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y^2 + x^2}{yx}, \quad y(1) = 2$$

Kürzen durch $x^2 \rightsquigarrow$ rechte Seite in homogener Form

$$\frac{y^2/x^2 + 1}{y/x} = f(y/x)$$

Substitution $xz = y \rightsquigarrow$

$$z' = \frac{1}{x}(f(z) - z) = \frac{1}{x} \left(\frac{z^2 + 1}{z} - z \right) = \frac{1}{xz}$$

Separation der Variablen

$$zz' = \frac{1}{x}$$

Integration

$$\frac{1}{2}z^2 = \ln|x| + c$$

Berücksichtigung des Anfangswertes $y(1) = z(1) = 2 \implies c = 2$ und

$$y = xz = x\sqrt{2\ln|x| + 4}$$

($z = -\sqrt{\dots}$ entspricht nicht dem vorgegebenen Anfangswert.)