Ableitung nach Anfangsbedingungen

Das Anfangswertproblem

$$u' = f(t,u), \quad u(t_0) = a\,,$$

lässt sich für stetig differenzierbares f nach $(a_1,\ldots,a_n)^{\mathrm{t}}$ partiell ableiten.
Man erhält die Matrix-Differentialgleichung

$$u_a' = f_u(t,u)u_a, \quad u_a(t_0) = E\,,$$

mit der Jacobi-Matrix $u_a = (\partial u/\partial a_1,\ldots,\partial u/\partial a_n)$ und E der $(n \times n)$ Einheitsmatrix.
Durch Taylor-Entwicklung folgt für die Lösung v zu einem benachbarten Anfangswert $v(t_0) = a + \Delta a$

$$v(t) = u(t) + u_a(t)\Delta a + O((\Delta a)^2)\,.$$

Beispiel:

Differentialgleichungen für die Bahnkurve eines antriebslosen Raumschiffs in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} r' &= u \\ u' &= \frac{v^2}{r} - \frac{\gamma}{r^2} \\ v' &= -\frac{uv}{r} \end{aligned}$$

γ: Gravitationskonstante
r: Abstand vom Erdmittelpunkt
u, v: radiale und tangentiale Geschwindigkeitskomponente

stationärer Orbit:

$$\begin{pmatrix} r' \\ u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} r \\ u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \sqrt{\gamma / r_0} \end{pmatrix}$$

Störung der Anfangswerte:

$$p^{\mathrm{t}} = (r_0, 0, \sqrt{\gamma/r_0}) \to \tilde{p}^{\mathrm{t}}$$

Näherung für die resultierende Bahnkurve

$$\begin{pmatrix} \tilde{r}(t) \\ \tilde{u}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \\ \sqrt{\gamma/r_0} \end{pmatrix} + \underbrace{J(t) \begin{pmatrix} \Delta r(0) \\ \Delta u(0) \\ \Delta v(0) \end{pmatrix}}_{d(t)}$$

Jacobi-Matrix J bestimmt durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$J' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{\gamma}{r_0^3} & 0 & \dfrac{2\sqrt{\gamma/r_0}}{r_0} \\ 0 & -\dfrac{\sqrt{\gamma/r_0}}{r_0} & 0 \end{pmatrix}}_{A} J\,,\ J(0) = E\,,$$

Berechnung von A durch Einsetzen der ungestörten Lösung in die Ableitung der rechten Seite:

$$A = \left.\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v^2}{r^2} + 2\frac{\gamma}{r^3} & 0 & \frac{2v}{r} \\ \frac{uv}{r^2} & -\frac{v}{r} & -\frac{u}{r} \end{pmatrix}\right|_{(r,u,v)=(r_0,0,\sqrt{\gamma/r_0})}$$

(Bei einem stationären Orbit hängt A nicht von t ab.)
$\rightsquigarrow$ Berechnung von $d(t)$ durch Lösen eines linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten:

$$d'(t) = J'(t)\, d(0) = A\, J(t)\, d(0) = A\, d(t), \quad d(0) = \begin{pmatrix} \Delta r(0) \\ \Delta u(0) \\ \Delta v(0) \end{pmatrix}$$