Ablaufsteuerung

Ergänzung von Befehlen/Umgebungen durch Steuerangaben

- `<n>` *Anzeige nur auf der* `n`*-ten Folie eines Frames*
- `<n-m>` *Anzeige von der* `n`*-ten bis zur* `m`*-ten Folie*
- `<-n>` *(*`<n->`*) Anzeige bis zur (ab der)* `n`*-ten Folie*
- `<+->` *Neue Folie erzeugen und ab dieser anzeigen*

Ablaufsteuerung

Ergänzung von Befehlen/Umgebungen durch Steuerangaben

`<n>` *Anzeige nur auf der* `n`*-ten Folie eines Frames*
`<n-m>` *Anzeige von der* `n`*-ten bis zur* `m`*-ten Folie*
`<-n>` *(*`<n->`*) Anzeige bis zur (ab der)* `n`*-ten Folie*
`<+->` *Neue Folie erzeugen und ab dieser anzeigen*

weitere Befehle

- `\pause`: Anzeige des vorangehenden Inhaltes
- `\visible<`*Anzeige*`>{`*Inhalt* `}`: Anzeige auf den festgelegten Folien

Ablaufsteuerung

Ergänzung von Befehlen/Umgebungen durch Steuerangaben

`<n>` *Anzeige nur auf der* `n`*-ten Folie eines Frames*
`<n-m>` *Anzeige von der* `n`*-ten bis zur* `m`*-ten Folie*
`<-n>` *(*`<n->`*) Anzeige bis zur (ab der)* `n`*-ten Folie*
`<+->` *Neue Folie erzeugen und ab dieser anzeigen*

weitere Befehle

- `\pause`: Anzeige des vorangehenden Inhaltes
- `\visible<`*Anzeige*`>{`*Inhalt* `}`: Anzeige auf den festgelegten Folien

Umgebung zur alternativen Anzeige von Inhalten

```
\begin{overprint}
  \onslide<Anzeige> Inhalt
\end{overprint}
```

Beispiel

```
\begin{frame}[shrink]
  \frametitle{Konvergenzordnung}
    \begin{Satz}[Quadratische Konvergenz]
      \dots
    \end{Satz}
    \pause
    \begin{Beweis}
      \begin{itemize}
        \item<+-> Lineare Taylor-Approximation: \dots
        \item<+-> Einsetzen \dots
        \item<+-> $1/f'(x_n)$ \dots
       \end{itemize}
    \end{Beweis}
  \end{frame}
```

Konvergenzordnung

Satz (Quadratische Konvergenz)

Für eine einfache Nullstelle $x_\star$ konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch, d.h.

$$|x_{n+1} - x_\star| \leq c|x_n - x_\star|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_\star$.

Konvergenzordnung

Satz (Quadratische Konvergenz)

Für eine einfache Nullstelle $x_\star$ konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch, d.h.

$$|x_{n+1} - x_\star| \leq c|x_n - x_\star|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_\star$.

Beweis.

- Lineare Taylor-Approximation: $0 = f(x_\star) = f(x_n) + f'(x_n)(x_\star - x_n) + r$ mit Restglied $r = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_\star - x_n)^2$, ξ_n zwischen $x_\star$ und x_n

□

Konvergenzordnung

Satz (Quadratische Konvergenz)

Für eine einfache Nullstelle $x_\star$ konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch, d.h.

$$|x_{n+1} - x_\star| \leq c|x_n - x_\star|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_\star$.

Beweis.

- Lineare Taylor-Approximation: $0 = f(x_\star) = f(x_n) + f'(x_n)(x_\star - x_n) + r$ mit Restglied $r = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_\star - x_n)^2$, ξ_n zwischen $x_\star$ und x_n
- Einsetzen von $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_\star) - r$ in Iterationsvorschrift ergibt $x_{n+1} = x_\star - r/f'(x_n)$.

□

Konvergenzordnung

Satz (Quadratische Konvergenz)

Für eine einfache Nullstelle $x_\star$ konvergiert die Newton-Iteration lokal quadratisch, d.h.

$$|x_{n+1} - x_\star| \leq c|x_n - x_\star|^2$$

für Startpunkte x_0 in einer hinreichend kleinen Umgebung von $x_\star$.

Beweis.

- Lineare Taylor-Approximation: $0 = f(x_\star) = f(x_n) + f'(x_n)(x_\star - x_n) + r$ mit Restglied $r = \frac{1}{2} f''(\xi_n)(x_\star - x_n)^2$, ξ_n zwischen $x_\star$ und x_n
- Einsetzen von $f(x_n) = f'(x_n)(x_n - x_\star) - r$ in Iterationsvorschrift ergibt $x_{n+1} = x_\star - r/f'(x_n)$.
- $|1/f'(x_n)|$ und $|f''(\xi_n)|$ sind für $x_n \approx x_\star$ aus Stetigkeitsgründen gleichmäßig beschränkt. Dies impliziert $|x_{n+1} - x_\star| \leq c|x_n - x_\star|^2$ mit $c \approx -\frac{1}{2} \frac{f''(x_\star)}{f'(x_\star)}$.

□

Beispiel

```
\begin{frame}
  \frametitle{Nullstellenbestimmung}
  \begin{Beispiel}
    Bestimmung ...
  \end{Beispiel}
  \pause
  \begin{columns}
    \begin{column}{5cm} \small
      \begin{tabular}{|l|l|l|} \hline
          $n$ & $x_n$ & $|f(x_n)|$  \\ \hline \hline
          \tt 0 & \tt 1.5500e+00 & \tt 3.1275e-01 \\ \hline
          \alert<2>{\tt 1} & \visible<2->{\tt 1.9199e-01} &
            \visible<2->{\tt 1.9035e+00} \\ \hline
              ...
      \end{tabular}
    \end{column}
```

```
    \begin{column}{5cm}
      \begin{overprint}
        \onslide<2>
          \includegraphics[width=\linewidth]{newton1.pdf}
        \onslide<3>
          \includegraphics[width=\linewidth]{newton2.pdf}
          ...
      \end{overprint}
    \end{column}
  \end{columns}
\end{frame}
```

Nullstellenbestimmung

Beispiel

Bestimmung der Nullstelle $x_\star = 1$ der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)(3-x)}{x+1}$$

ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.55$.

Nullstellenbestimmung

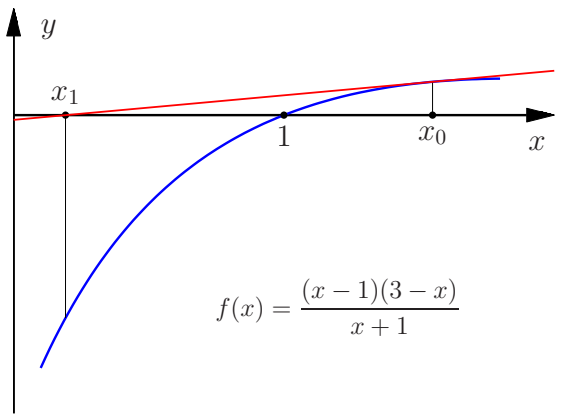
Beispiel

Bestimmung der Nullstelle $x_\star = 1$ der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)(3-x)}{x+1}$$

ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.55$.

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1.5500e+00	3.1275e-01
1	1.9199e-01	1.9035e+00
2		
3		
4		
5		
6		
7		



Nullstellenbestimmung

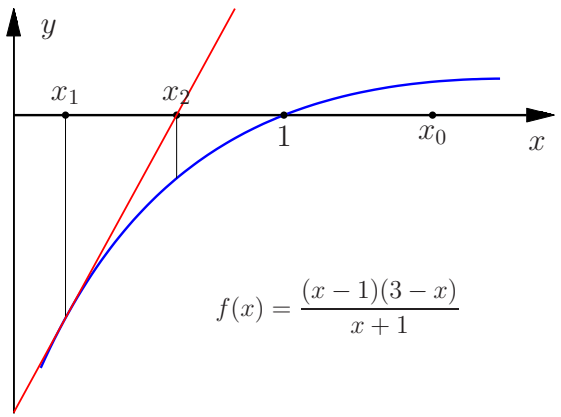
Beispiel

Bestimmung der Nullstelle $x_\star = 1$ der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)(3-x)}{x+1}$$

ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.55$.

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1.5500e+00	3.1275e-01
1	1.9199e-01	1.9035e+00
2	6.0306e-01	5.9352e-01
3		
4		
5		
6		
7		

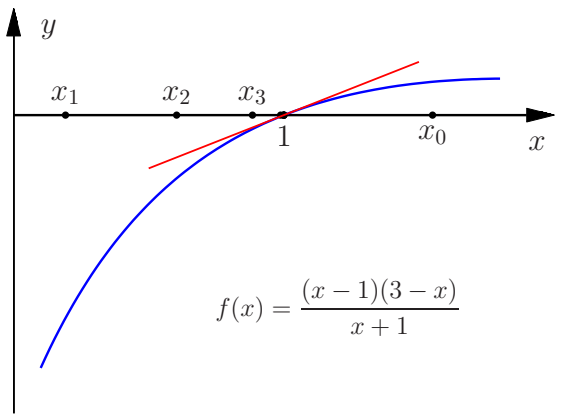


Nullstellenbestimmung

Beispiel

Bestimmung der Nullstelle $x_\star = 1$ der rationalen Funktion

$$f(x) = \frac{(x-1)(3-x)}{x+1}$$

ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.55$.

n	x_n	$\lvert f(x_n)\rvert$
0	1.5500e+00	3.1275e-01
1	1.9199e-01	1.9035e+00
2	6.0306e-01	5.9352e-01
3	8.8394e-01	1.3036e-01
4	9.8789e-01	1.2254e-02
5	9.9986e-01	1.4484e-04
6	1.0000e-00	2.0969e-08
7	1.0000e-00	4.4409e-16