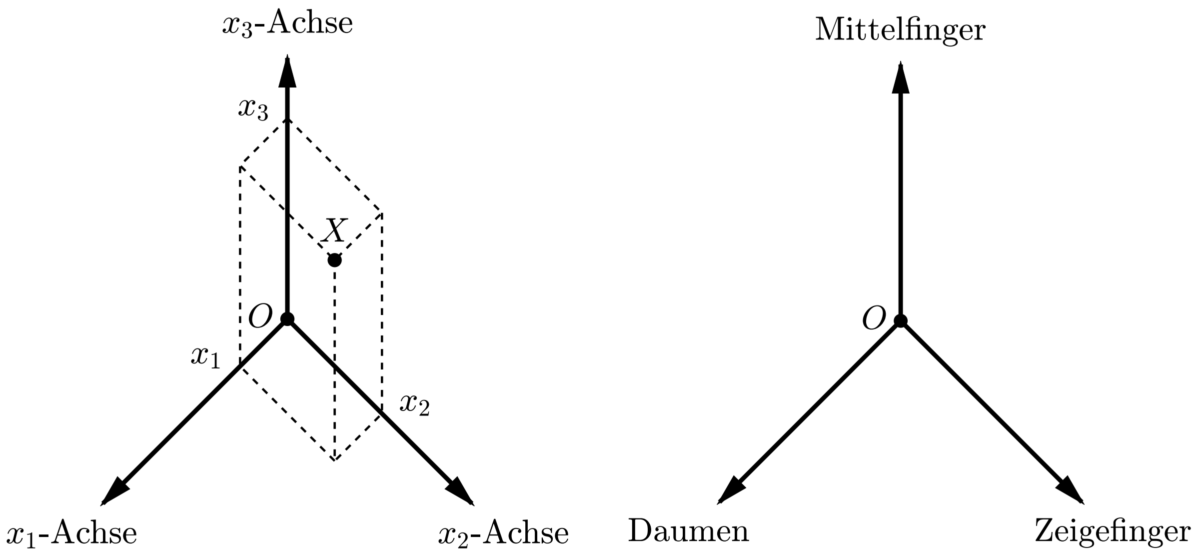
Kartesisches Koordinatensystem

Ein räumliches kartesisches Koordinatensystem besteht aus 3 sich in einem als Ursprung bezeichneten Punkt O senkrecht schneidenden Zahlengeraden (Achsen), deren Orientierung gemäß der in der Abbildung veranschaulichten „Rechten-Hand-Regel“ gewählt ist.



Ein Punkt X wird durch seine als Koordinaten x_i bezeichneten Werte der Projektionen auf die Achsen festgelegt:

$$X = (x_1, x_2, x_3) .$$

Verwendet man keine Indexschreibweise, so bezeichnet man die Koordinaten üblicherweise mit (x, y, z) und die Zahlenachsen als x-, y- und z-Achse.

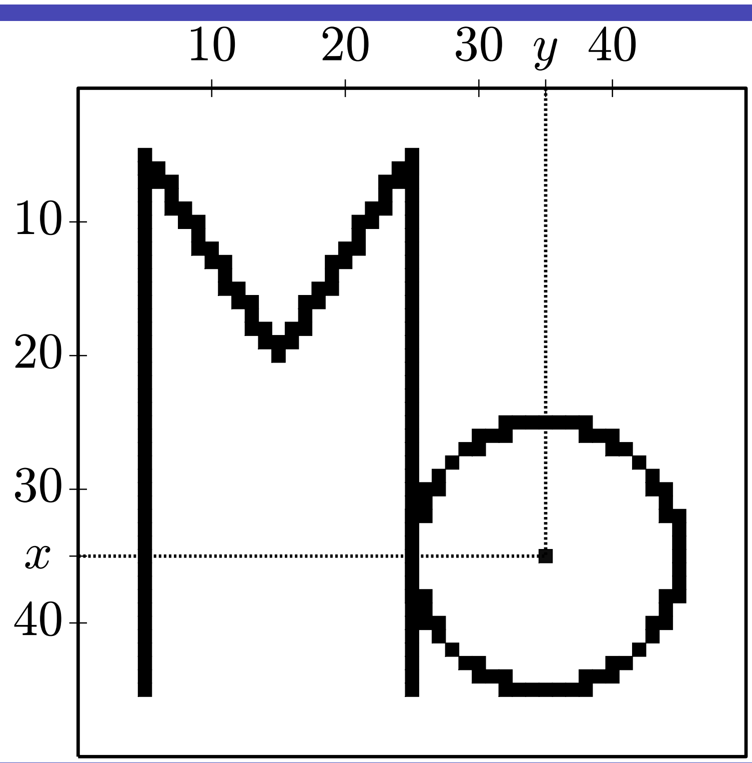
Analog definiert man ein ebenenes kartesisches Koordinatensystem.

Beispiel

Grafik-Fenster:
Objekte in Pixel-Koordinaten, meist bezogen auf die linke obere Bildecke, z.B.

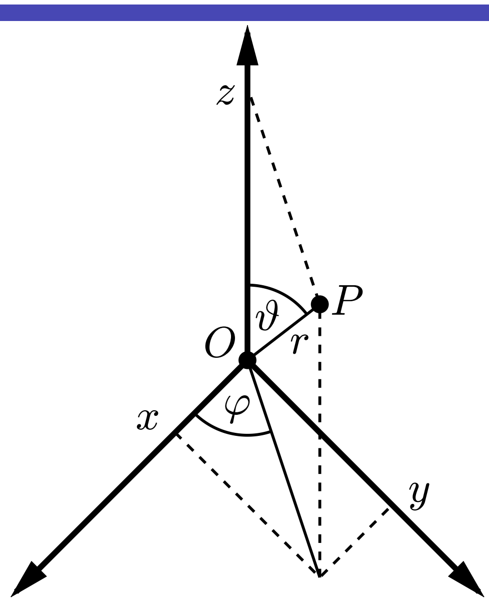
$$(x, y) = (35, 35)$$

für den Mittelpunkt des Kreises in der Abbildung



Kugelkoordinaten

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ kann durch seinen Abstand $r = |\overline{OP}|$ zum Ursprung, den Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ zwischen $\overline{OP}$ und der z-Achse und den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Projektion von $\overline{OP}$ auf die xy-Ebene dargestellt werden.



Der Winkel φ der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Als Standardbereich wird meist $\varphi \in (-\pi, \pi]$ vereinbart.

Für $x = y = 0$ (Punkt auf der z-Achse) ist φ beliebig und, falls ebenfalls $z = 0$, so auch ϑ. In diesen Fällen kann Null als kanonischer Wert gewählt werden.

Es gilt

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r \cos\vartheta$$

bzw. für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \vartheta = \arccos(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}), \quad \varphi = \arctan(y/x)\,,$$

wobei je nach Vorzeichen von x und y ein geeigneter Zweig des Arcustangens zu wählen ist, d.h. gegebenenfalls $\pm\pi$ zu addieren ist. Mit dem Hauptzweig-Winkel $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt bei Wahl des Standardbereichs für φ

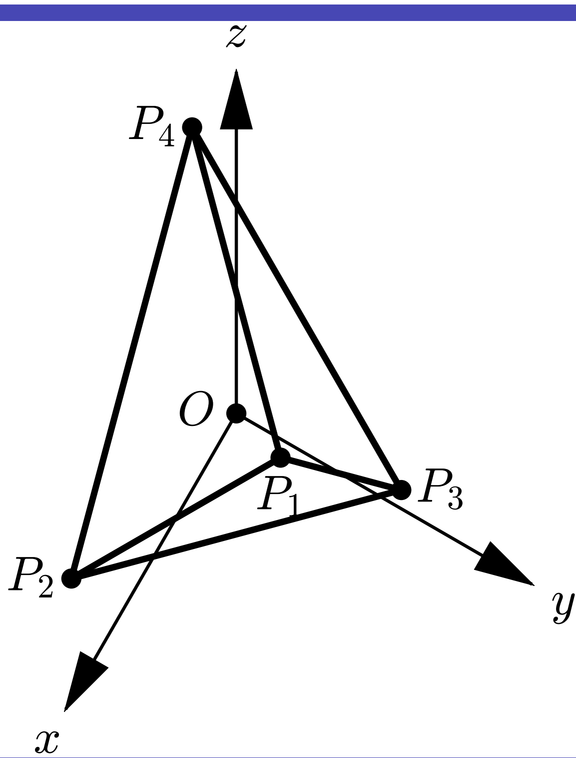
$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0 \wedge y \neq 0, \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0\,. \end{cases}$$

Beispiel

Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) der Eckpunkte

$$P_1 = (1, 1, 1), \quad P_2 = (1, -1, -1),$$
$$P_3 = (-1, 1, -1), \quad P_4 = (-1, -1, 1)$$

eines regelmäßigen Tetraeders mit Kantenlänge $2\sqrt{2}$ und Schwerpunkt O



- P_1, $(x,y,z) = (1,1,1)$:
  (i) $r = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$
  (ii) $\vartheta = \arccos(z/r) = \arccos(1/\sqrt{3}) = 0.9553$
  (iii) Parallelität der Projektion von $\overline{OP}$ auf die xy-Ebene zur ersten Winkelhalbierenden $\quad \Longrightarrow \quad \varphi = \pi/4$
  rechnerisch: $\varphi_H = \arctan(x/y) = \arctan(1/1) = \pi/4$ und da $x = 1 > 0$ ist keine Korrektur (Addition von $\pm\pi$) notwendig, d.h. $\varphi = \varphi_H$

Analoge Berechnungen für die anderen Punkte:

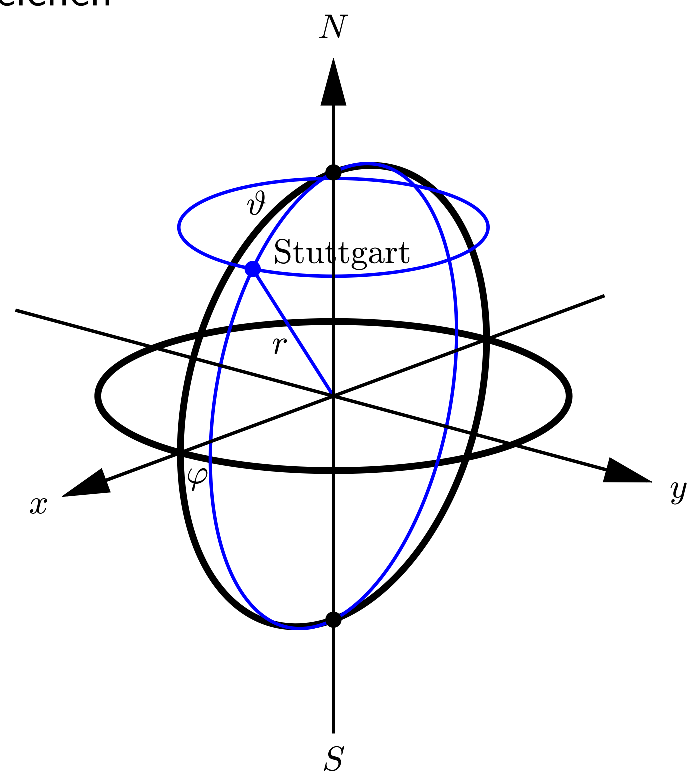
- $P_2 = (1,-1,-1) \to (\sqrt{3}, \pi-\psi, -\pi/4)$
- $P_3 = (-1,1,-1) \to (\sqrt{3}, \pi-\psi, 3\pi/4)$
- $P_4 = (-1,-1,1) \to (\sqrt{3}, \psi, -3\pi/4)$

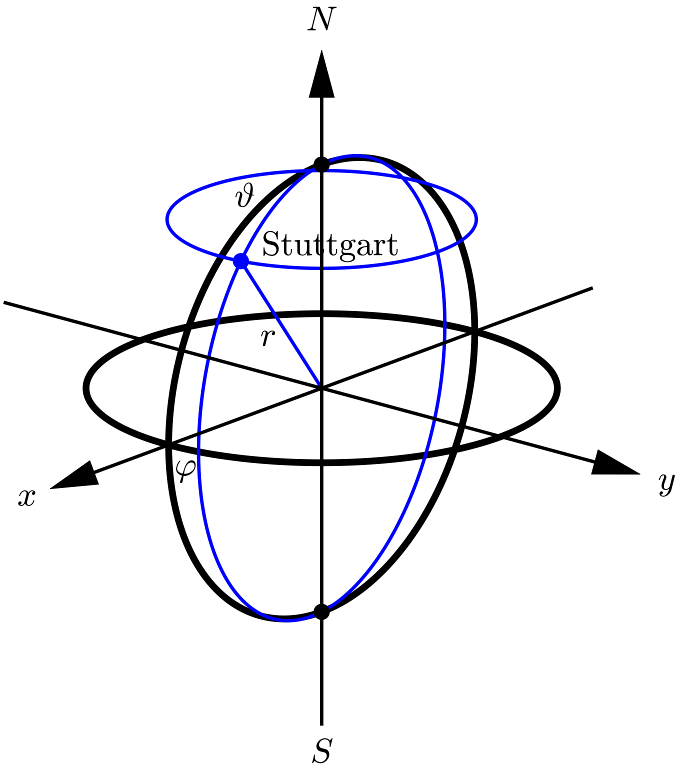
mit $\psi = \arccos(1/\sqrt{3})$
benutzt: $\arccos(-1/\sqrt{3}) = \pi - \psi$ aufgrund der Antisymmetrie des Kosinus bzgl. $\pi/2$

$$\cos(\psi) = -\cos(\pi - \psi)$$

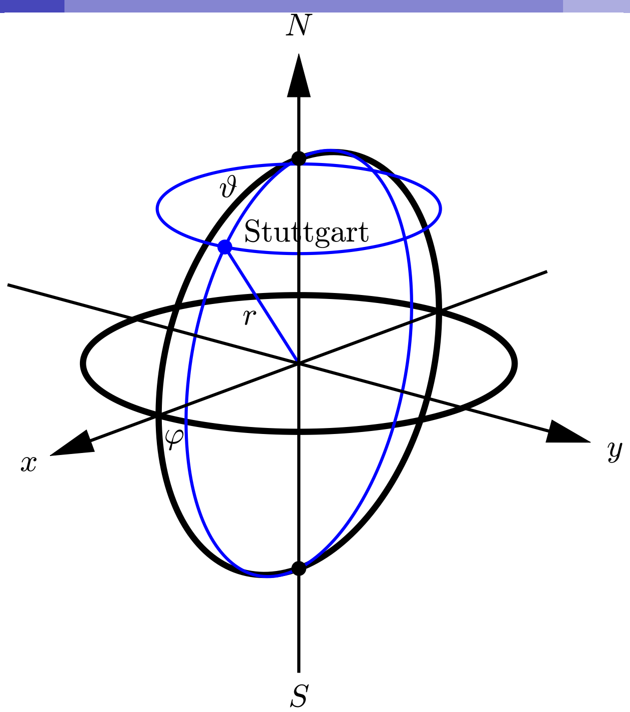
Beispiel

Längen- und Breitengrade auf der Erdkugel: Kugelkoordinaten (r,ϑ,φ) mit anderen Winkelbereichen





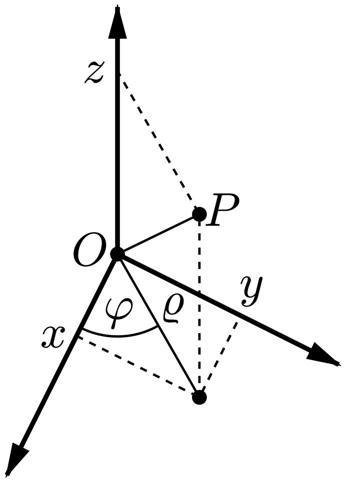
östliche Länge	0° – 180°	$\varphi = 0 \ldots \pi$
westliche Länge	0° – 180°	$\varphi = 0 \ldots -\pi$
nördliche Breite	0° – 90°	$\vartheta = \pi/2 \ldots 0$
südliche Breite	0° – 90°	$\vartheta = \pi/2 \ldots \pi$



Äquator (Breite 0°) und nullter Längenkreis fett
Nordpol: 90° n. Br., Südpol: 90° s. Br.
Längen- und Breitenkreise für Stuttgart: 9° ö. L., 49° n. Br.

$$\varphi = \frac{9}{180}\pi = \frac{1}{20}\pi, \quad \vartheta = \frac{90-49}{180}\pi = \frac{41}{180}\pi$$

Ein Punkt $P = (x, y, z)$ kann durch den Winkel φ zwischen der x-Achse und der Projektion von $\overline{OP}$ auf die xy-Ebene, die Länge ϱ der Projektion und die z-Koordinate dargestellt werden.



Der Winkel φ der Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) ist nur bis auf ein Vielfaches von 2π bestimmt. Als Standardbereich wird meist $\varphi \in (-\pi, \pi]$ vereinbart.

Für $x = y = 0$ (Punkt auf der z-Achse) ist φ beliebig; als kanonischer Wert kann Null gewählt werden.

Es gilt

$$x = \varrho \cos\varphi, \quad y = \varrho \sin\varphi, \quad z = z$$

bzw. für $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad z = z\,,$$

wobei je nach Vorzeichen von x und y ein geeigneter Zweig des Arcustangens zu wählen ist. Mit dem Hauptzweig-Winkel $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ gilt bei Wahl des Standardbereichs für φ

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_H, & \text{für } x > 0, \\ \operatorname{sign}(y)\pi/2, & \text{für } x = 0 \,\wedge\, y \neq 0 \\ \varphi_H + \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \varphi_H - \pi, & \text{für } x < 0 \wedge y < 0. \end{cases}$$

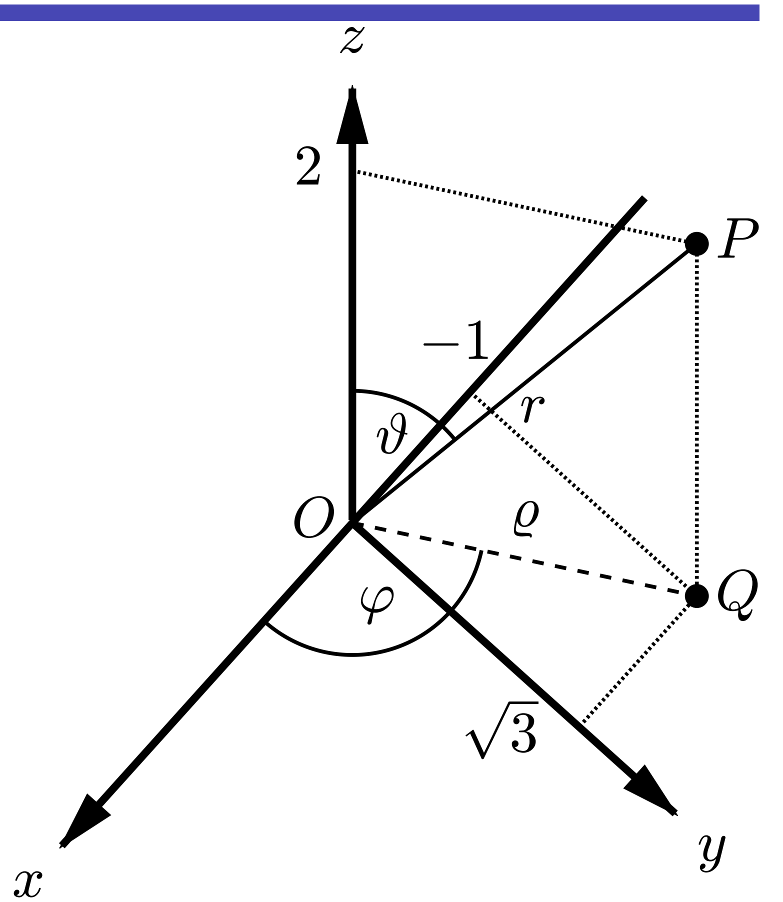
Beispiel

Zylinder- und Kugelkoordinaten,

$$(\varrho, \varphi, z) \quad \text{bzw.} \quad (r, \vartheta, \varphi)\,,$$

des Punkts

$$P = (x, y, z) = (-1, \sqrt{3}, 2)$$



- Abstände vom Ursprung:

$$\begin{aligned} \varrho &= |\overline{OQ}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2, \\ r &= |\overline{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1+3+4} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Winkel mit der x-Achse:

$$\varphi = \arctan(y/x) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi$$

(Addition von π zum Winkel $\varphi_H = \arctan(y/x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ des Hauptzweigs des Arkustangens wegen $x < 0$ und $y > 0$)

- Winkel mit der z-Achse:

$$\vartheta = \arccos(z/r) = \arccos(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

alternative Winkelbestimmung:
$X = (x, 0, 0)$, O, Q bilden die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks
$\Longrightarrow$

$$\sphericalangle(X, O, Q) = \pi/3, \quad \varphi = \pi - \pi/3 = 2\pi/3$$

$Z = (0, 0, z)$, O, P bilden ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck
$\Longrightarrow$

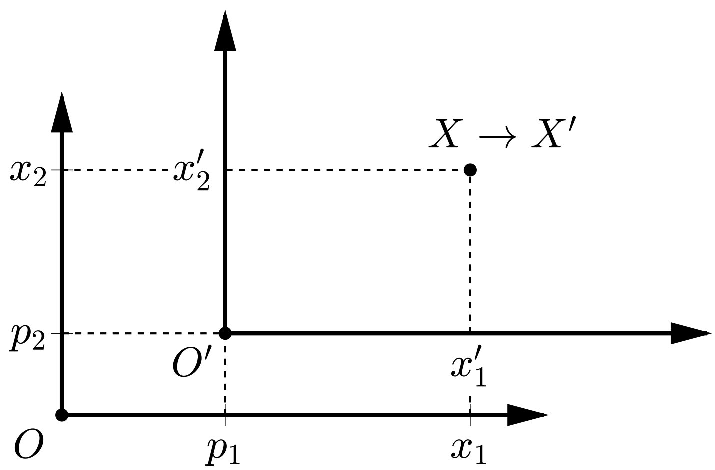
$$\vartheta = \sphericalangle(Z, O, P) = \pi/4$$

Translation eines kartesischen Koordinatensystems

Bei einer Verschiebung des Ursprungs O nach $O' = (p_1, p_2, p_3)$ ändern sich bei gleichbleibender Richtung der Achsen die Koordinaten eines Punktes $X = (x_1, x_2, x_3)$ gemäß

$$X' = (x_1 - p_1, x_2 - p_2, x_3 - p_3)\,.$$

In der Abbildung ist die entsprechende Transformation für ein Koordinatensystem in der Ebene illustriert.



Beispiel

ebene gleichförmige Bewegung

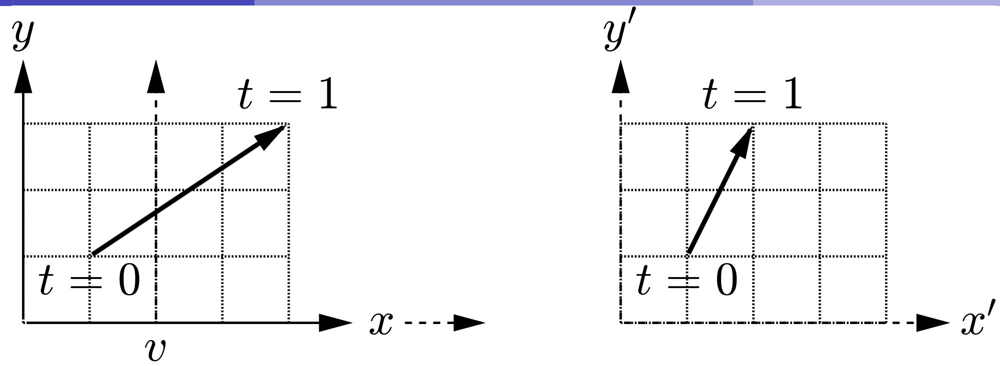
$$(x(t),\, y(t)) = (p + at,\, q + bt), \quad t \geq 0\,,$$

betrachtet aus einem in x-Richtung mit Geschwindigkeit v fahrenden Zug

Änderung der Koordinaten:

$$x' = x - vt, \quad y' = y$$

$\rightsquigarrow$ andere beobachtete Geschwindigkeit



transformierte Koordinaten eines Objekts, das sich in einer Zeiteinheit von $P = (1,1)$ nach $Q = (4,3)$ bewegt ($a = 3,\ b = 2$) für $v = 2$

$$P' = (1,1), \quad Q' = (4-2, 3-0) = (2,3)$$

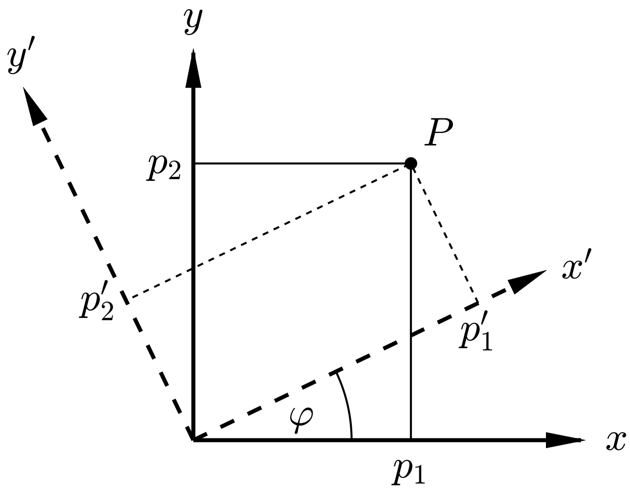
tatsächliche und beobachtete Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} v_t &= |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(4-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{13} \\ v_b &= |\overrightarrow{P'Q'}| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

Rotation der Ebenen eines kartesischen Koordinatensystems

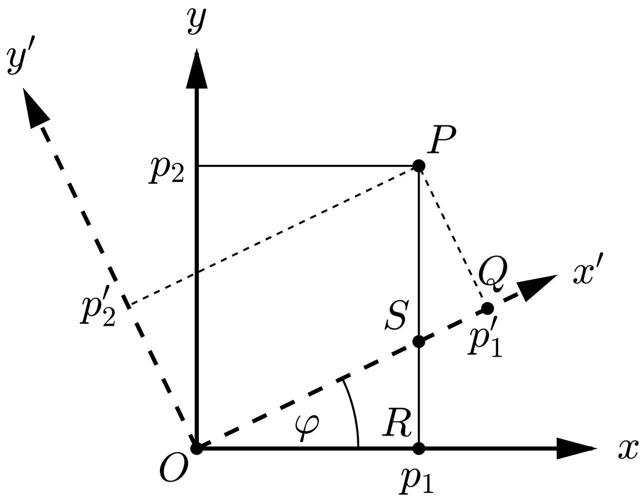
Bei einer Drehung der xy-Ebene um die z-Achse mit dem Winkel φ transformieren sich die Koordinaten eines Punktes $P = (p_1, p_2, p_3)$ gemäß

$$p_1' = \cos\varphi\, p_1 \;+\; \sin\varphi\, p_2, \quad p_2' = -\sin\varphi\, p_1 \;+\; \cos\varphi\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$



Analoge Formeln erhält man für Drehungen der yz- und zx-Ebene.

Beweis



$\sphericalangle(O,S,R) = \sphericalangle(P,S,Q) = \pi/2 - \varphi$
$\Longrightarrow$
Kongruenz der Dreiecke $\triangle(O,S,R)$ und $\triangle(P,S,Q)$

erstes Dreieck:

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\varphi, \quad |\overline{RS}| = p_1 \tan\varphi = p_1 \sin\varphi/\cos\varphi$$

zweites Dreieck:

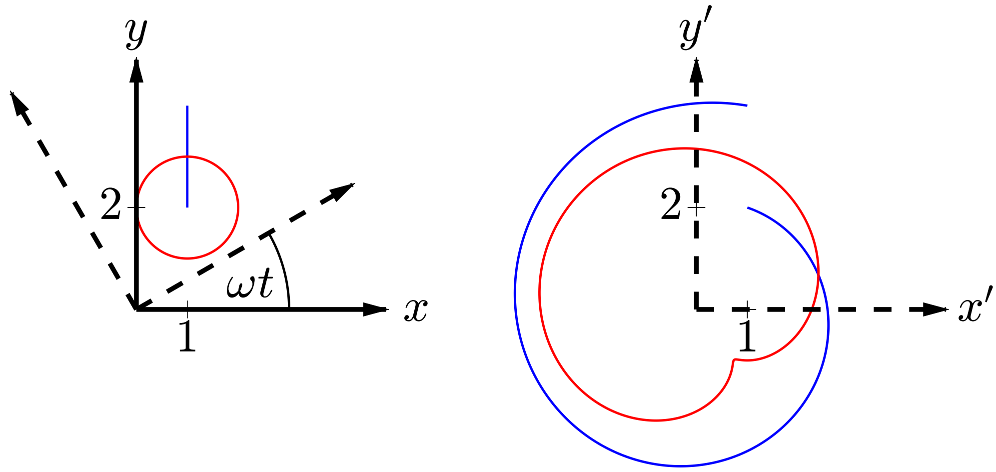
$$\begin{aligned}
p_2' &= \cos\varphi\,|\overline{PS}| = \cos\varphi\,(p_2 - |\overline{RS}|) = \cos\varphi\, p_2 - \sin\varphi\, p_1 \\
p_1' &= |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\varphi + \sin\varphi\,(p_2 - |\overline{RS}|) \\
&= \frac{1-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\, p_1 + \sin\varphi\, p_2 = \cos\varphi\, p_1 + \sin\varphi\, p_2
\end{aligned}$$

Beispiel

Bahnkurven von geradlinigen und kreisförmigen Bewegungen (links)

$$\begin{aligned} G: &\quad (x, y) = (1,\, 2 + t/\pi), \\ K: &\quad (x, y) = (1 + \cos(t),\, 2 + \sin(t)) \end{aligned}$$

beobachtet in einem mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ rotierenden Bezugssystem (rechts)



Transformation

$$x' = cx + sy, \quad y' = -sx + cy$$

mit $c = \cos(\omega t)$, $s = \sin(\omega t)$
geradlinige Bewegung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Spirale:

$$x' = c + s(2 + t/\pi), \quad y' = -s + c(2 + t/\pi)$$

kreisförmige Bewegung:

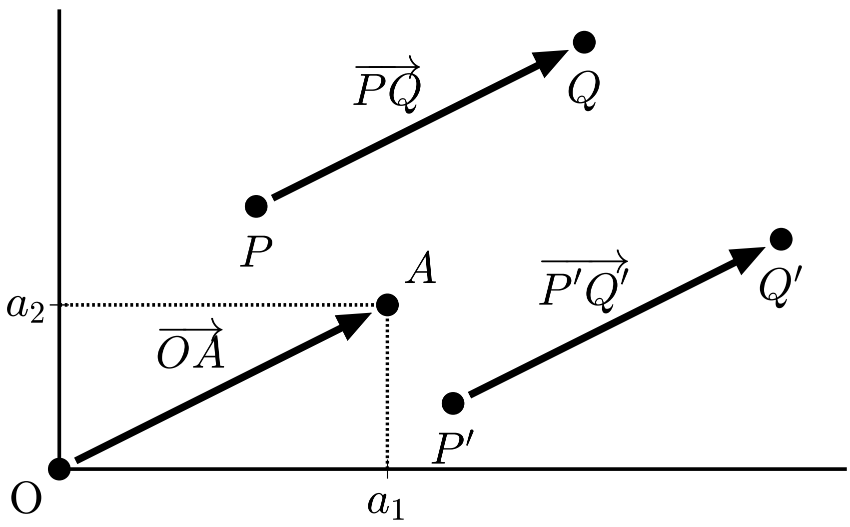
$$x' = c(1 + \tilde{c}) + s(2 + \tilde{s}), \quad y' = -s(1 + \tilde{c}) + c(2 + \tilde{s})$$

($\tilde{c} = \cos t$, $\tilde{s} = \sin t$)
abrupte Richtungsänderung möglich

Ein Vektor kann geometrisch mit einem Pfeil (gerichtete Strecke) identifiziert werden:

$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$$

bezeichnet den Vektor vom Punkt P zum Punkt Q.



Wie aus der Abbildung ersichtlich ist, stellen gleichlange Pfeile mit gleicher Richtung den gleichen Vektor dar, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$. Die spezielle Darstellung bezogen auf den Ursprung O des Koordinatensystems wird als Ortsvektor bezeichnet und definiert die Koordinaten a_k des Vektors, die ebenfalls als Differenzen der Punktkoordinaten (p_1, p_2, p_3), (q_1, q_2, q_3) berechnet werden können:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} .$$

Insbesondere bewirkt die Umkehrung der Richtung des Vektors eine Änderung des Vorzeichens: $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ} = -\vec{a}$.
Schließlich wird mit

$$\overrightarrow{OO} = \overrightarrow{PP} = \vec{0}$$

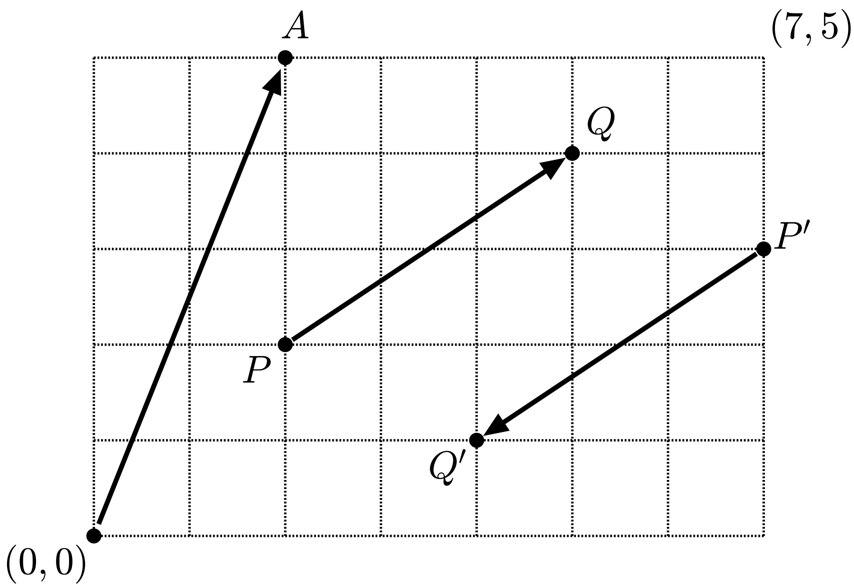
der Nullvektor bezeichnet.

Punktkoordinaten werden als „liegendes“ Tupel (Ebene) oder Tripel (Raum) dargestellt während für Vektoren die „stehende“ Darstellung üblich ist. Durch Transposition (Symbol $^{\mathrm{t}}$) kann zur jeweils anderen Schreibweise gewechselt werden:

$$(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{t}}\,.$$

Beispiel

Bestimmung der abgebildeten Vektoren



(i) Ortsvektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$:
Koordinaten entsprechen denen des Punktes $A = (2, 5)$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(ii) Vektor $\overrightarrow{PQ}$:
Differenzbildung der Koordinaten p_k, q_k der Punkte $P = (2, 2)$, $Q = (5, 4)$
$\leadsto$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - 2 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Vektor $\overrightarrow{P'Q'}$:
gleiche Länge wie $\overrightarrow{PQ}$ und entgegengesetzte Richtung $\implies$ Umkehrung des Vorzeichens, d.h.

$$\overrightarrow{P'Q'} = -\overrightarrow{PQ} = (-3, -2)^{\mathrm{t}}$$

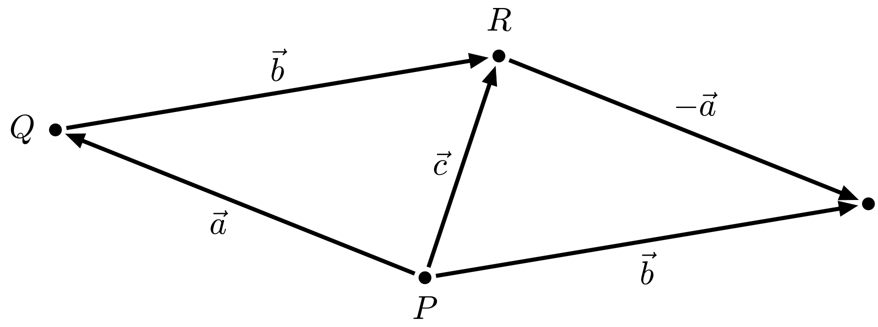
Probe
direkte Berechnung durch Differenzbildung der Punktkoordinaten

$$\overrightarrow{P'Q'} = \begin{pmatrix} q_1' - p_1' \\ q_2' - p_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 7 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Addition von Vektoren

Geometrisch lässt sich die Summe von zwei Vektoren durch Aneinandersetzen der Pfeile bilden:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}\,.$$



Für die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$, $\vec{c} = \overrightarrow{PR}$ gilt entsprechend

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich spielt die Reihenfolge bei der Addition von Vektoren keine Rolle:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\,.$$

Geometrisch wird dies durch ein mit den Vektoren gebildetes Parallelogramm veranschaulicht.
Die Differenz von zwei Vektoren entspricht der Addition des Vektors mit umgekehrter Richtung:

$$\vec{c} - \vec{a} = \vec{c} + (-\vec{a}) = \vec{b}\,,$$

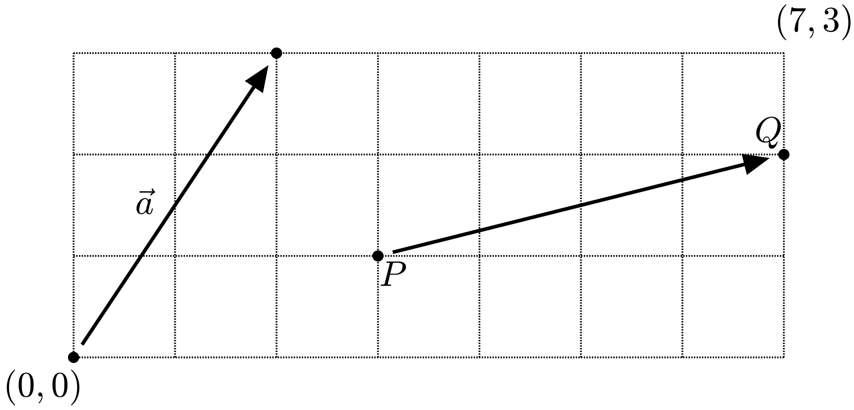
wie in der Abbildung illustriert ist. Insbesondere ist

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}, \quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\,.$$

Es gelten somit die üblichen Rechenregeln.

Beispiel

Bilden der Summe und Differenz der abgebildeten Vektoren



(i) Koordinatendarstellungen:
$\vec{a} = (2,3)^t$
$P = (3,1)$, $Q = (7,2)$ $\quad \Longrightarrow$

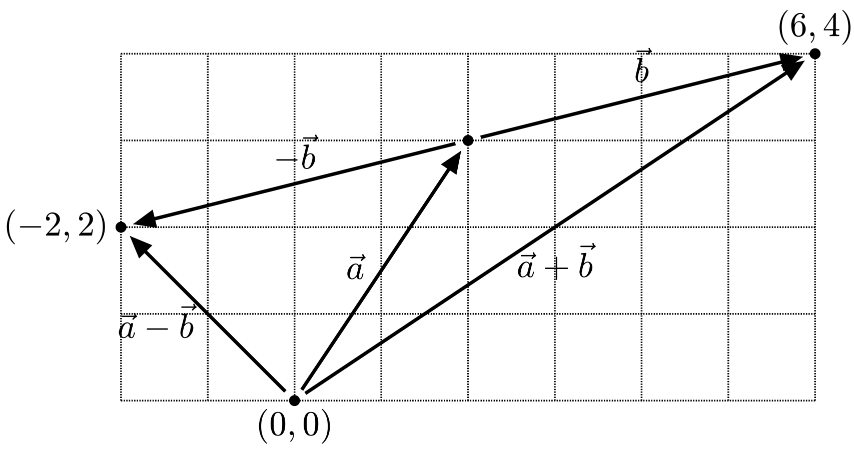
$$\vec{b} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Summe und Differenz:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{c} &= \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

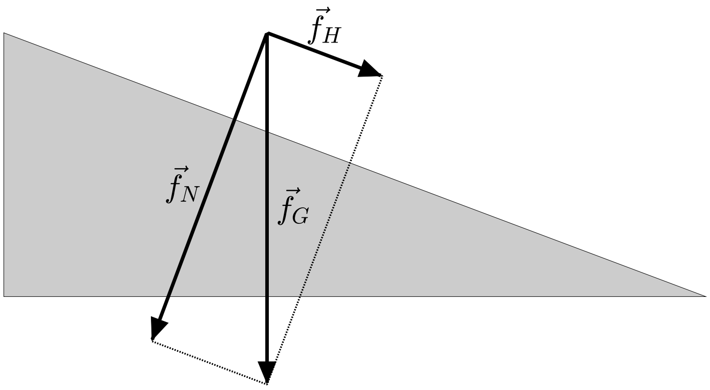
und $\vec{b} - \vec{a} = -\vec{c} = (2,-2)^t$

(iii) Geometrische Konstruktion:



Beispiel

Zerlegung der Gewichtskraft $\vec{f}_G$ für eine schiefe Ebene mit Hilfe des Kräfteparallelogramms



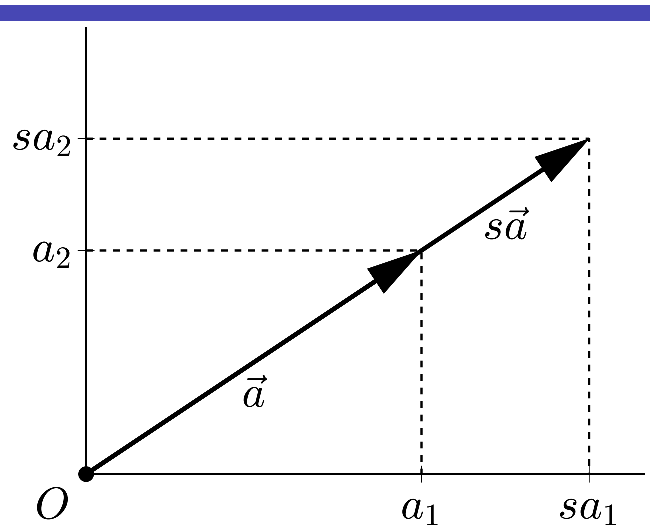
Projektion von $\vec{f}_G$ auf eine zur Ebene parallele und orthogonale Richtung
$\rightsquigarrow$ Zerlegung

$$\vec{f}_G = \underbrace{\vec{f}_H}_{\text{Hangabtriebskraft}} + \underbrace{\vec{f}_N}_{\text{Normalkraft}}$$

Skalarmultiplikation

Bei Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar s ($s \in \mathbb{R}$) werden die Koordinaten a_k mit s multipliziert:

$$s \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ sa_3 \end{pmatrix} .$$



Die Multiplikation mit s bewirkt eine Skalierung der Länge des Vektors um den Faktor $|s|$. Die Richtung bleibt für $s > 0$ unverändert; für $s < 0$ kehrt sie sich um.

Speziell ist $0\vec{a} = \vec{0}$.

Beispiel

Linearkombinationenen der Vektoren

$$\vec{a} = (2, -3, 1)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{b} = (1, -2, 0)^{\mathrm{t}}$$

(i) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$:
Multiplikation mit den Skalaren 2, 3

$$2\vec{a} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 \\ 2\cdot(-3) \\ 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bilden der Differenz $\quad \rightsquigarrow$

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 \\ -6-(-6) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(ii) $\vec{d} = 3\vec{c} + 2\vec{b}$:

$$3\vec{c} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

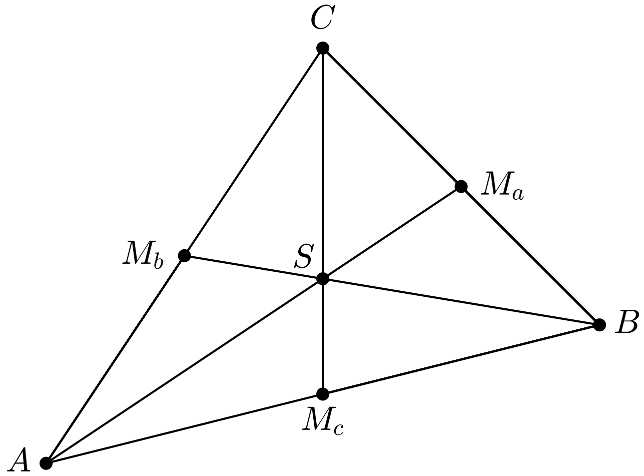
alternativ:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= 3\vec{c} + 2\vec{b} = 3(2\vec{a} - 3\vec{b}) + 2\vec{b} = 6\vec{a} - 7\vec{b} \\ &= 6\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-7 \\ -18-(-14) \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beispiel

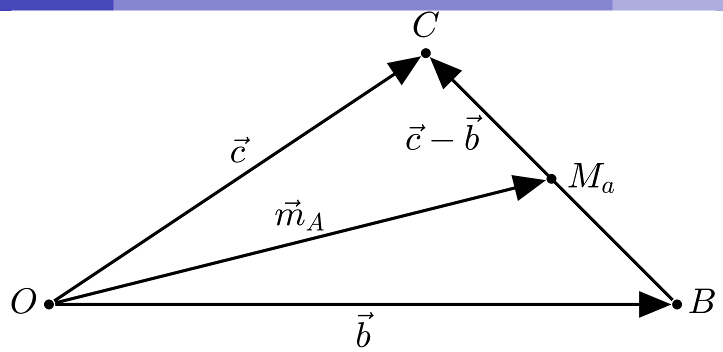
Schnittpunkt S (Schwerpunkt) der Seitenhalbierenden in einem Dreieck:

$$\vec{s} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$$



Herleitung durch Darstellung der Punkte mit Hilfe von Ortsvektoren

$$A \to \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad M_a \to \vec{m}_a = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM_a} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}), \quad \text{etc.}$$



Einsetzen von $\vec{m}_a = (\vec{b} + \vec{c})/2$ in die Parametrisierung

$$\vec{p} = \vec{a} + t(\vec{m}_a - \vec{a}), \quad t \in [0, 1]\,,$$

der Verbindungsstrecke $\overline{AM_a}$ $\rightsquigarrow$

$$\vec{p} = \vec{a} + t\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right)$$

$t = 2/3 \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = \vec{s} = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})/3$, d.h. S teilt $\overline{AM_a}$ im Verhältnis $2/3 : 1/3 \sim 2 : 1$
analoges Argument für $\overline{BM_b}$ und $\overline{CM_c}$
$\rightsquigarrow$ gemeinsamer Punkt S der drei Seitenhalbierenden

Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p}$ ist die Länge des Pfeils von P nach Q bzw. von O nach A, d.h.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}, \quad a_k = q_k - p_k\,.$$

Insbesondere gilt $|s\vec{a}| = |s|\,|\vec{a}|$ für $s \in \mathbb{R}$.
Ein Vektor mit Betrag bzw. Länge 1 wird als Einheitsvektor bezeichnet und man benutzt die Schreibweise

$$\vec{v}^{\circ} = \vec{v}/|\vec{v}|$$

für einen solchen normierten Vektor.

Beispiel

Betrag und Normierung der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \overrightarrow{PQ} \text{ mit } P = (3,8),\ Q = (7,5)$$

(i) $\vec{a}$:
Betrag

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Normierung

$$\vec{a}^{\circ} = \vec{a}/|\vec{a}| = (2,-1,2)^{\mathrm{t}}/3 = (2/3, -1/3, 2/3)^{\mathrm{t}}$$

(ii) $\overrightarrow{PQ}$:

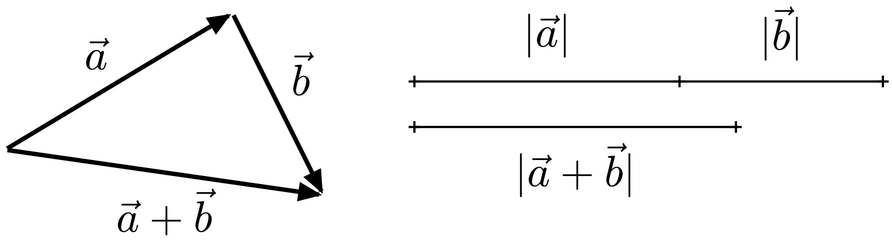
$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(7-3)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \quad \overrightarrow{PQ}^{\circ} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

Dreiecksungleichung

Der Betrag der Summe zweier Vektoren lässt sich durch die Summe ihrer Beträge abschätzen:

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

mit Gleichheit genau dann wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Richtung haben, d.h. $\vec{a}=s\vec{b}$ mit $s>0$ oder (im trivialen Fall) wenn mindestens einer der Vektoren der Nullvektor ist.



Beweis

mehrere Alternativen

(i) Geometrisches Argument:
Jede Seite des (nicht entarteten) Dreiecks, das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{b}$ gebildet wird, ist kürzer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

(ii) Anwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:
CS: $\quad |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq |\vec{u}|\,|\vec{v}| \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
|\vec{a}+\vec{b}|^2 &= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \\
&\underset{CS}{\leq} |\vec{a}|^2+2|\vec{a}|\,|\vec{b}|+|\vec{b}|^2 \\
&= (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2
\end{aligned}$$

Gleichheit $\quad\Leftrightarrow\quad$ Gleichheit in CS und $\vec{a}\cdot\vec{b}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad$ gleiche Richtung von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ oder mindestens ein Nullvektor

(iii) Anwendung des Satzes von Pythagoras:
P: $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$
[Beweis durch Ausmultiplizieren von $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$]
im nicht trivialen Fall $\vec{a} \neq \vec{0}$ Darstellung von $\vec{b}$ in der Form

$$\vec{b} = s\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{c} \perp \vec{a}$$

[Wert von s irrelevant, Berechnung aus der Bedingung
$0 = \vec{c}\cdot\vec{a} = (\vec{b} - s\vec{a})\cdot\vec{a} = 0$ möglich]
Einsetzen in die quadrierte linke Seite der Dreiecksungleichung $\rightsquigarrow$

$$|(\vec{a}+s\vec{a})+\vec{c}|^2 \underset{P}{=} |(1+s)\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 = (1+s)^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2$$

Vergleich mit der quadrierten rechten Seite der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} (|\vec{a}|^2 + |s\vec{a}+\vec{c}|)^2 &= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|s\vec{a}+\vec{c}| + |s\vec{a}+\vec{c}|^2 \\ &\underset{P}{=} |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\sqrt{s^2|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2} + s^2|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 \end{aligned}$$

und Weglassen der identischen Terme $|\vec{a}|^2$, $s^2|\vec{a}|^2$, $|\vec{c}|^2 \quad \rightsquigarrow \quad$ zur Dreiecksungleichung äquivalente Ungleichung

$$2s|\vec{a}|^2 \leq 2|\vec{a}|\sqrt{s^2|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2}$$

erfüllt, da $s|\vec{a}| \leq \sqrt{s^2|\vec{a}|^2+|\vec{c}|^2}$
Gleichheit genau dann, wenn $\vec{c} = \vec{0}$ und $s \geq 0$, d.h. wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Vektoren mit gleicher Richtung sind $(s > 0)$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ $(s = 0)$

Beispiel

Illustration der Dreiecksungleichung

$$|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

für die Vektoren

$$\vec{a} = (1, 8, 4)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{b} = (2, -2, 1)^{\mathrm{t}}$$

Linke Seite

$$\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b} &= (1+2, 8-2, 4+1)^{\mathrm{t}} = (3, 6, 5)^{\mathrm{t}} \\
|\vec{a}+\vec{b}| &= \sqrt{3^2+6^2+5^2} = \sqrt{9+36+25} = \sqrt{70}
\end{aligned}$$

Rechte Seite

$$\begin{aligned}
|\vec{a}| &= \sqrt{1^2+8^2+4^2} = \sqrt{81} = 9 \\
|\vec{b}| &= \sqrt{2^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{9} = 3
\end{aligned}$$

Vergleich: $\sqrt{70} < 9+3 \quad \checkmark$

Rechenregeln für Vektoren

Für Vektoren gelten die folgenden Rechenregeln.

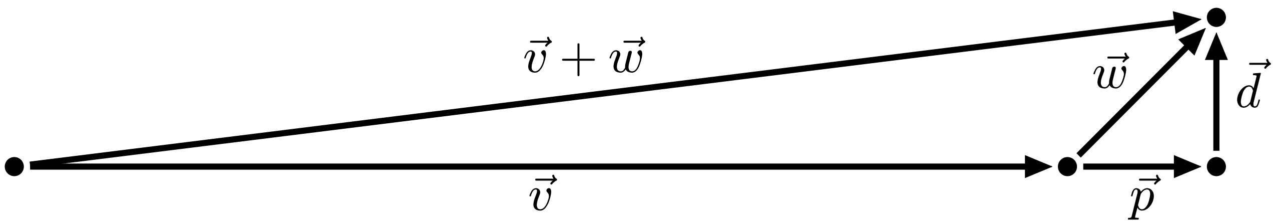
- Kommutativgesetz:
$$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$$
- Assoziativgesetz:
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$$
- Distributivgesetz:
$$s(\vec{a}+\vec{b}) = s\vec{a}+s\vec{b}, \quad s \in \mathbb{R}$$

Beispiel

Bestimmung der Drift eines Flugzeugs mit einer Geschwindigkeit von 250km/h nach Osten und einer Windgeschwindigkeit von 50km/h aus Südwest.

Geschwindigkeitsvektor des Flugzeugs (Osten in Richtung der ersten Koordinatenachse), und Vektor der Windgeschwindigkeit (aus Südwest $\Leftrightarrow$ Richtung Nordost, d.h. Winkel $\pi/4$ mit der Ostrichtung)

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} 50\cos(\pi/4) \\ 50\sin(\pi/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50/\sqrt{2} \\ 50/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$



Position nach einer Stunde

$$\vec{v}+\vec{w} \approx \begin{pmatrix} 250+35.35 \\ 35.35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 285.35 \\ 35.35 \end{pmatrix}$$

Geschwindigkeitskomponente nach Osten

$$\vec{v}+\vec{p} = \begin{pmatrix} 285.35 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $\vec{p} = (35.35, 0)^t$ der Komponente von $\vec{w}$ in Richtung von $\vec{v}$
Drift (orthogonal zum Kurs) nach Norden

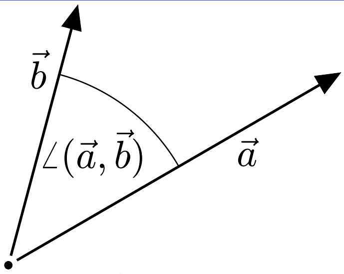
$$\vec{d} = \vec{v}+\vec{w}-(\vec{v}+\vec{p}) \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 35.35 \end{pmatrix}$$

Betrag der Gesamtgeschwindigkeit

$$|\vec{v}+\vec{w}| = \sqrt{285.35^2+35.35^2} \approx 287.53$$

Winkel zwischen zwei Vektoren

Für $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ bezeichnet man mit $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$ den kleineren der beiden Winkel, den die mit den Vektoren assoziierten Pfeile in einem gemeinsamen Scheitelpunkt bilden.



Die beiden Vektoren sind orthogonal, $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/2$ oder ein Vektor der Nullvektor ist.
Winkel können mit Hilfe des Skalarproduktes berechnet werden:

$$\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} .$$

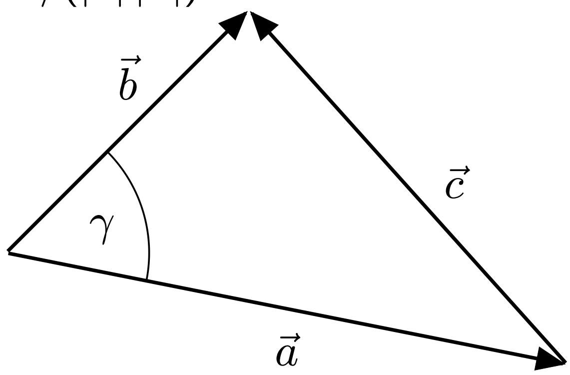
Einige Kosinuswerte:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Beweis

Herleitung der Formel $\cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)$ mit dem Kosinussatz

$$2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2$$



Einsetzen von $\vec{c} = (-\vec{a}) + \vec{b}$ $\rightsquigarrow$ Vereinfachung der rechten Seite

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2 &= \sum_{k=1}^{3} a_k^2 + \sum_{k=1}^{3} b_k^2 - \sum_{k=1}^{3} (b_k - a_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{3} 2 b_k a_k = 2\vec{a} \cdot \vec{b} , \end{aligned}$$

wobei $(b_k - a_k)^2 = b_k^2 - 2b_k a_k + a_k^2$ benutzt wurde

Gleichsetzen mit der linken Seite des Kosinussatzes und Division durch 2 $\Longrightarrow$

$$|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\gamma = \vec{a}\cdot\vec{b}\,,$$

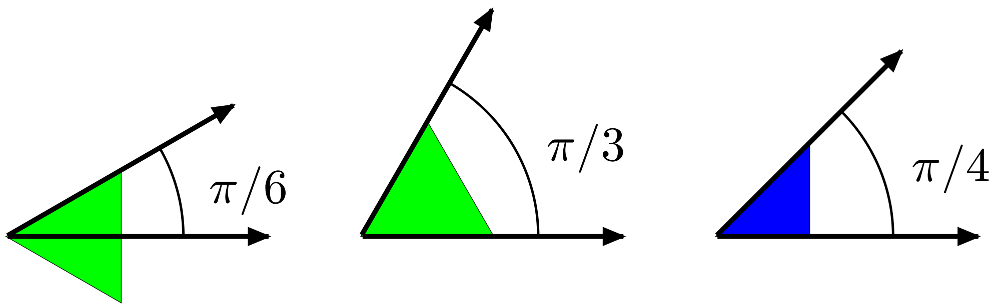
d.h. die behauptete Formel

Beispiel

Darstellung einiger Winkel und Berechnung des Winkels zwischen den Vektoren

$$\vec{a} = (2,1,2)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{b} = (4,-1,1)^{\mathrm{t}}$$

(i) Konstruktion mit Hilfe von Dreiecken:



- $\pi/6$: halber Winkel im gleichseitigen Dreieck

$$\vec{a} = (s,0)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \parallel (\sqrt{3}/2, \pm 1/2)^{\mathrm{t}}$$

- $\pi/3$: Winkel im gleichseitigen Dreieck

$$\vec{a} = (s, 0)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \parallel (1/2, \pm\sqrt{3}/2)^{\mathrm{t}}$$

- $\pi/4$: Winkel im rechtwinklig gleichschenkligen Dreieck

$$\vec{a} = (s, 0)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{b} \parallel (\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)^{\mathrm{t}}$$

(ii) Berechnung mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos(\vec{a} \cdot \vec{b}/(|\vec{a}|\,|\vec{b}|))$$

Einsetzen von

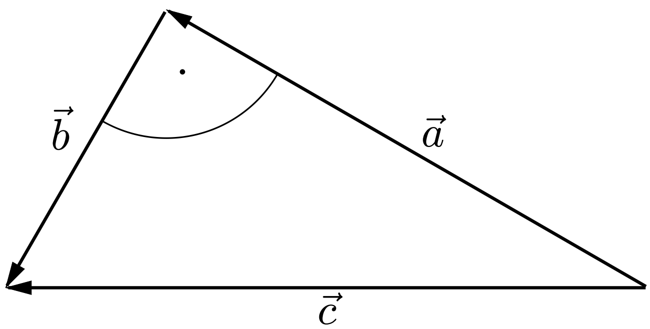
$$\begin{array}{rclrcl} \vec{a} & = & (2,1,2)^{\mathrm{t}}, & |\vec{a}| & = & \sqrt{2^2+1^2+2^2} = 3 \\ \vec{b} & = & (4,-1,1)^{\mathrm{t}}, & |\vec{b}| & = & \sqrt{16+1+1} = 3\sqrt{2} \end{array}$$

und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 9 \quad \rightsquigarrow$

$$\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos(9/(3 \cdot 3\sqrt{2})) = \arccos(1/\sqrt{2}) = \pi/4$$

Satz des Pythagoras

Die Längen $a = |\vec{a}|$, $b = |\vec{b}|$ der Katheten und die Länge $c = |\vec{c}|$ der Hypothenuse in einem von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, gebildeten rechtwinkligen Dreieck erfüllen



$$a^2 + b^2 = c^2 \,.$$

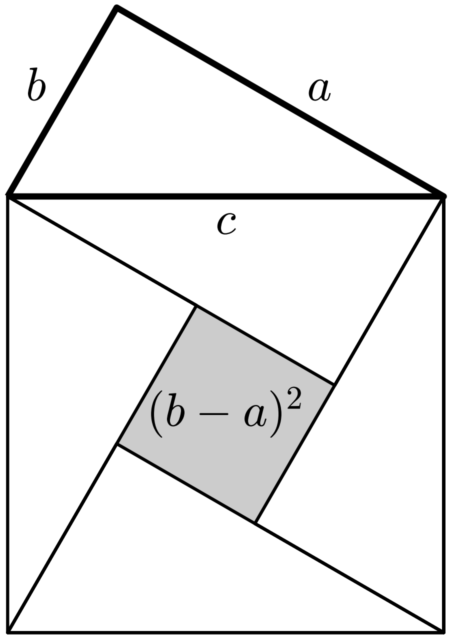
Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ gilt entsprechend

$$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\underbrace{\vec{a} + \vec{b}}_{\vec{c}}|^2 \,.$$

Der Satz ist heute als Satz des Pythagoras (569-475 v. Chr.) bekannt, obwohl ihn bereits die Babylonier mehr als 1000 Jahre früher kannten. Möglicherweise war aber Pythagoras der erste, der ihn bewiesen hat.

Beweis

(i) Geometrische Argument:
Unterteilung des Quadrats über der Hypothenuse in 4 zum Ausgangsdreieck kongruente Dreiecke und ein Quadrat mit Seitenlänge $b - a$



Flächeninhalt des Dreiecks: $ab/2$

Summierung der Flächeninhalte (4 Dreiecke und ein Quadrat) $\implies$

$$\begin{aligned} c^2 &= 4(ab/2) + (b-a)^2 \\ &= 2ab + (b^2 - 2ab + a^2) \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

(ii) Vektorkalkül:
$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \quad \implies$

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a}}_{=0,\ \text{da}\ \vec{a} \perp \vec{b}} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Konsistenz zu den Regeln für Skalarprodukte

kein Beweis, da der Satz des Pythagoras bei der Berechnung der Vektorlänge,

$$|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 \,,$$

benutzt wird

Beispiel

Konstruktion Pythagoräischer Tripel:

$$\ell, m, n \in \mathbb{N}: \quad \ell^2 + m^2 = n^2\,,$$

d.h. ganzzahlige Seitenlängen für rechtwinklige Dreiecke

Anwendung durch die Ägypter: Konstruktion rechter Winkel via Ergänzung ungerader Zahlen ℓ durch $m = (\ell^2 - 1)/2$ und $n = (\ell^2 + 1)/2$ zu einem Pythagoräischen Tripel:

$$\begin{aligned} \ell^2 + m^2 &= \ell^2 + \frac{\ell^4 - 2\ell^2 + 1}{4} \\ &= \frac{\ell^4 + 2\ell^2 + 1}{4} \\ &= \left(\frac{\ell^2 + 1}{2}\right)^2 = n^2 \end{aligned}$$

Multiplikation der Tripel mit 2 $\quad\rightsquigarrow\quad$ Tripel für jede gerade Zahl $\ell \geq 6$

allgemeineres Konstruktionsprinzip mit Hilfe der dritten Binomischen Formel

$$c^2 - b^2 = (c - b)(c + b) = a^2$$

$\rightsquigarrow$ ganzzahlige Lösung, wenn a^2 in zwei unterschiedliche Faktoren zerlegbar ist, die eine gerade Differenz ($= 2b$) aufweisen

Für ungerades $a = \ell$ gilt dies für die Aufteilung $a^2 = a^2 \cdot 1$ mit

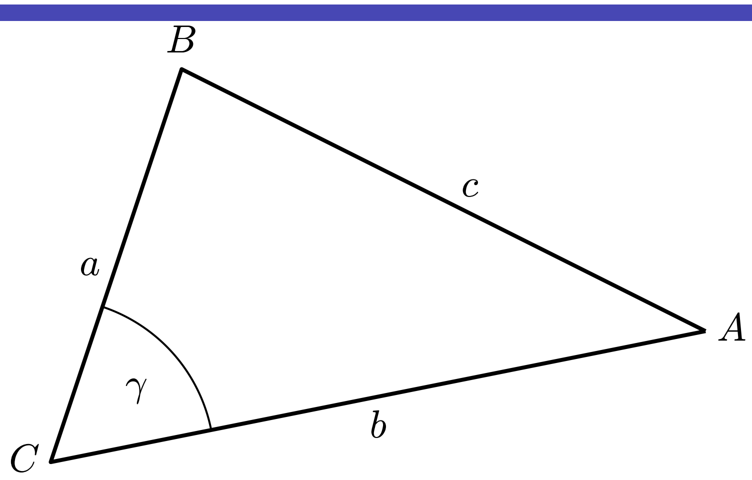
$$b = \frac{a^2 - 1}{2}\,, \quad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

$\rightsquigarrow$ obiger Spezialfall

Kosinussatz

In einem Dreieck gilt für die Seitenlängen a, b, c und für den der Seite $\overline{AB}$ gegenüberliegenden Winkel γ

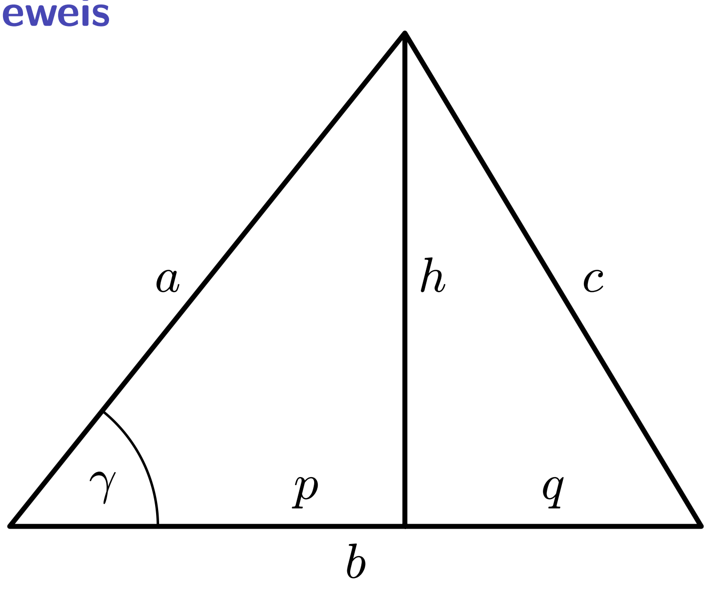
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma\,.$$



Als Spezialfall erhält man für $\gamma = \pi/2$ den Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2\,.$$

Beweis



Satz des Pythagoras $\implies$

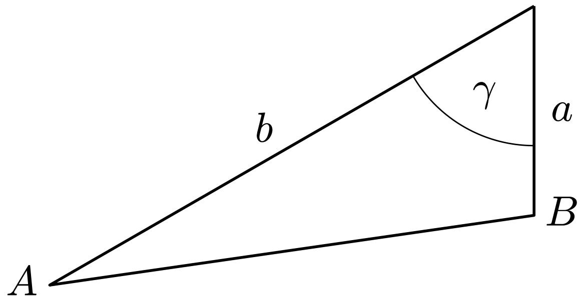
$$\begin{aligned} c^2 &= h^2 + q^2 \\ h^2 &= a^2 - p^2 \end{aligned}$$

Einsetzen von $q = b - p$, $p = a\cos\gamma$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} c^2 &= (a^2 - p^2) + (b-p)^2 \\ &= a^2 - p^2 + b^2 - 2b(a\cos\gamma) + p^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmung der dritten Seitenlänge $c = |\overline{AB}|$ und der Winkel α, β eines Dreiecks mit den Seitenlängen $a = 3$, $b = 8$ und dem eingeschlossenen Winkel $\gamma = \pi/3$.



Anwendung des Kosinussatzes

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

(i) Seitenlänge:
Einsetzen von $a = 3,\ b = 8$ und $\cos\gamma = \cos(\pi/3) = 1/2 \quad \rightsquigarrow$

$$c^2 = 9 + 64 - 2 \cdot 24 \cdot (1/2) = 49\,,$$

d.h. $c = 7$

(ii) Winkel:
Kosinussatz für den Winkel α bei A ($c \to a,\ a \to b,\ b \to c,\ \gamma \to \alpha$)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Einsetzen und Auflösen nach $\cos\alpha \quad \rightsquigarrow$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 3^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{104}{112} = 0.9286\,,$$

d.h. $\alpha = \arccos(0.9286) = 0.3803$

Winkelsumme $\pi \quad \Longrightarrow$

$$\beta = \pi - \alpha - \gamma = \pi - 0.3803 - \pi/3 = 1.7141$$

Probe

Einsetzen in den Kosinussatz für β

$$0 \stackrel{!}{=} b^2 - (c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta) = 64 - (49 + 9 - 2 \cdot 21 \cdot (-0.1429)) \quad \checkmark$$

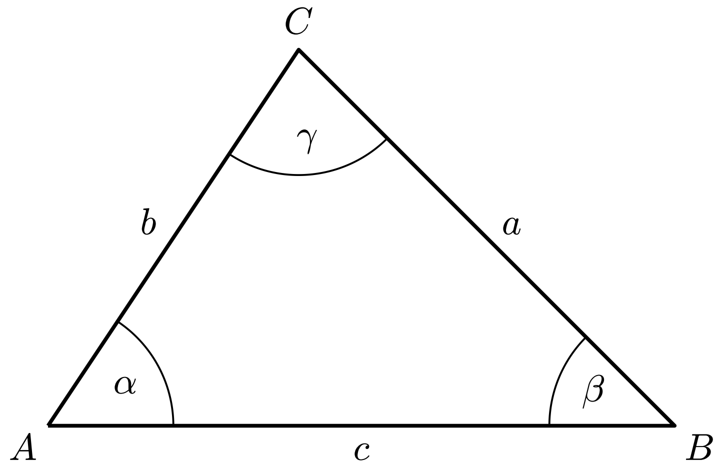
Sinussatz

In einem Dreieck verhalten sich die Längen der Seiten wie die Sinuswerte der gegenüberliegenden Winkel:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

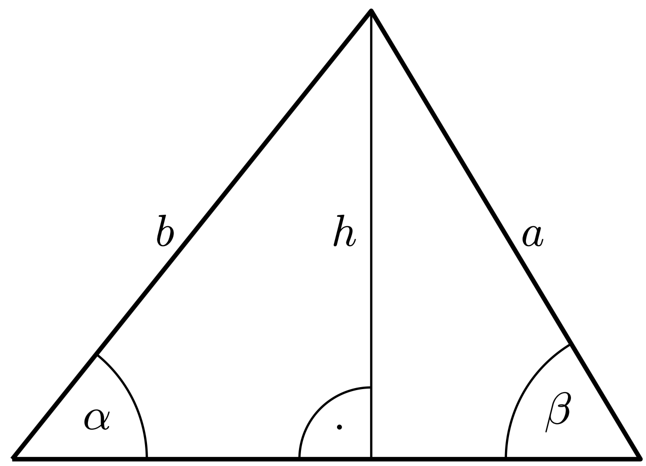
bzw.

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = a : b : c\,.$$



Beweis

Zerlegung des Dreiecks in zwei durch die Höhe zur Seite $\overline{AB}$ begrenzte rechtwinklige Teildreiecke



Definition des Sinus (Gegenkathete : Hypothenuse) $\Longrightarrow$

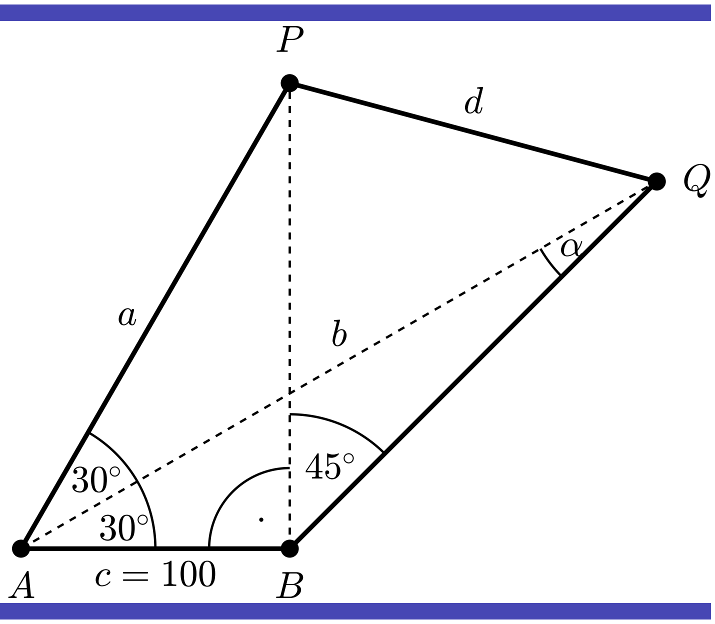
$$\sin\alpha = \frac{h}{b}, \quad \sin\beta = \frac{h}{a}$$

und somit

$$\sin\alpha : \sin\beta = \frac{h}{b} : \frac{h}{a} = a : b$$

Beispiel

Entfernung d zweier schwer zugänglicher Punkte P und Q durch Messung der Winkel an den Enden einer Referenzstrecke $\overline{AB}$



(i) Numerische Lösung:

$\sphericalangle(APB) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $\sin 30^\circ = 1/2 \quad \rightsquigarrow$

$$a = 100/\sin 30^\circ = 200$$

Winkelsumme gleich $180^\circ \quad \rightsquigarrow$

$$\alpha = 15^\circ$$

Sinussatz $\implies$ $b : 100 = \sin 135^\circ : \sin 15^\circ$, d.h.

$$b \approx 100 \cdot 0.7071/0.2588 = 273.2$$

Kosinussatz $\implies$ $d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 30^\circ$, d.h.

$$d \approx (40000 + 74640 - 2 \cdot 54640 \cdot 0.8660)^{1/2} = 141.4$$

(ii) Exakte algebraische Rechnung:
$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ und $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi \quad \Longrightarrow$

$$1/2 = \sin(30^\circ) = 2s\underbrace{\sqrt{1-s^2}}_{\cos(15^\circ)}, \quad s = \sin(15^\circ)$$

d.h. nach Quadrieren

$$\frac{1}{4} = 4s^2(1-s^2) \quad \Leftrightarrow \quad s^4 - s^2 + \frac{1}{16} = 0$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen $\quad \Longrightarrow$

$$s^2 = 1/2 \pm \sqrt{1/4 - 1/16} = 1/2 \pm \sqrt{3}/4$$

Lösung im Intervall $(0, \sin 30^\circ) = (0, 1/2) \quad \Longrightarrow \quad s = \sqrt{2-\sqrt{3}}/2$

Skalierung der Längen mit dem Faktor $1/100$, $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\tilde{a} = a_{\text{skaliert}} = 2, \quad \tilde{b} = \frac{1 \cdot \sin 135^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$$\tilde{d}^2 = \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 - 2\tilde{a}\tilde{b}\cos 30^\circ$$

$$= \quad 4 + \frac{4}{2(2-\sqrt{3})} - 2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$\rightsquigarrow \quad \tilde{d} = d_{\text{skaliert}} = \sqrt{2}$ und $d = 100\sqrt{2}$

(iii) Beweis der letzten Gleichheit:
Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$2 + \frac{2}{2-\sqrt{3}} \stackrel{!}{=} \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3} \quad \rightsquigarrow \quad$ vereinfachte linke Seite

$$2 + 2(2+\sqrt{3}) = 6 + \sqrt{3}$$

Quadrieren der Identität $\quad \rightsquigarrow$

$$36 + 24\sqrt{3} + 12 \stackrel{!}{=} \frac{48}{2(2-\sqrt{3})}$$

Übereinstimmung nach Rationalisieren des Nenners der rechten Seite durch Erweitern mit $2 + \sqrt{3}$

$$\frac{48(2+\sqrt{3})}{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \frac{96 + 48\sqrt{3}}{2(4-3)}$$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

definiert. Es lässt sich ebenfalls mit Hilfe des Winkels zwischen den Vektoren berechnen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \,.$$

Offensichtlich ist $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ sowie $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$, und aus $|\cos\varphi| \leq 1$ folgt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}|\,|\vec{b}| \,.$$

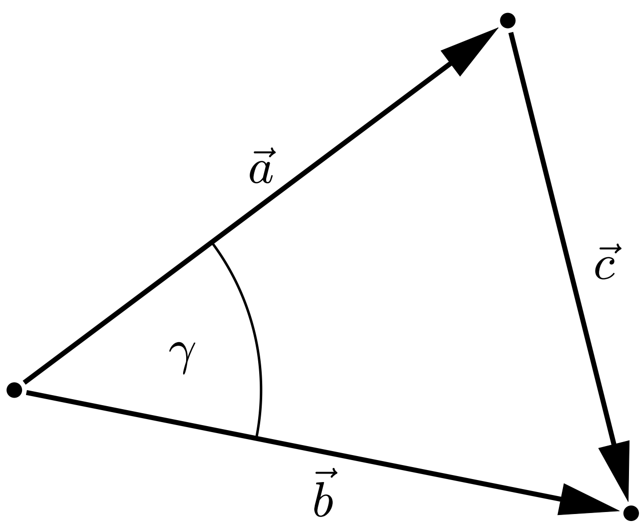
Es gelten die für Produkte üblichen Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \,, \\ \left(r\vec{a} + s\vec{b}\right) \cdot \vec{c} &= r\vec{a} \cdot \vec{c} + s\vec{b} \cdot \vec{c}, \quad r, s \in \mathbb{R} \,. \end{aligned}$$

Beweis

Herleitung der Äquivalenz der alternativen Definitionen mit Hilfe des Kosinussatzes:

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma$$



Umformung $\quad \rightsquigarrow$

$$2|\vec{a}||\vec{b}| \cos\gamma = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)$$

Substitution $c_i^2 = (b_i - a_i)^2 \quad \rightsquigarrow \quad$ Vereinfachung der rechten Seite zu

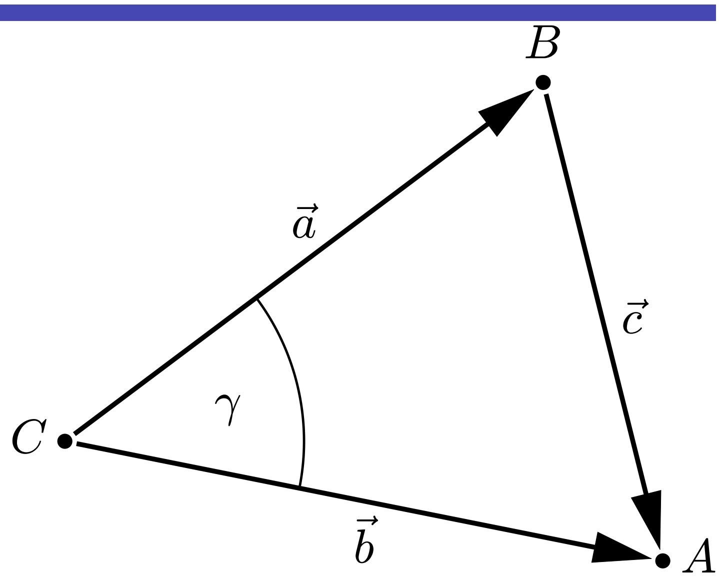
$$2a_1 b_1 + 2a_2 b_2 + 2a_3 b_3$$

Beispiel

Winkelberechnung und Illustration des Kosinussatzes für ein Dreieck mit Eckpunkten

$$A = (6,0), \quad B = (4,4), \quad C = (0,0)$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{b} &= \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{c} &= \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



- Winkelberechnung mit Hilfe des Skalarproduktes:

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{24}{\sqrt{32}\cdot 6} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{4}$$

- Illustration des Kosinussatzes:
  $\vec{a} = (4,4)^t$, $\vec{b} = (6,0)^t$, $\vec{c} = (2,-4)^t$, $\gamma = \pi/4 \quad \rightsquigarrow$

$$|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 20 - 32 - 36 = -48$$

und

$$-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma = -2\,(4\sqrt{2})\,6/\sqrt{2} = -48 \quad \checkmark$$

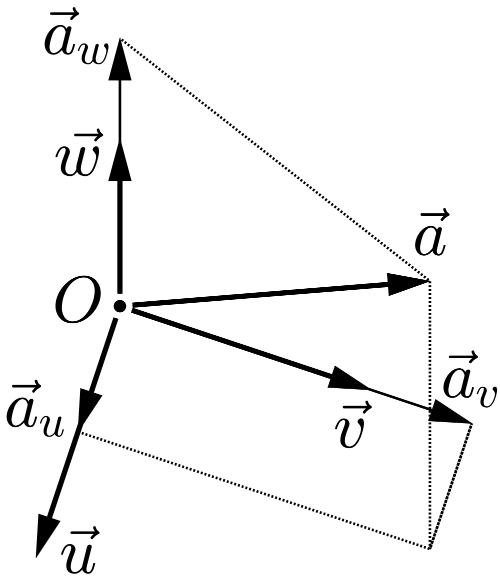
Orthogonale Basis in der Ebene und im Raum

Eine orthogonale Basis im Raum besteht aus drei paarweise orthogonalen Vektoren

$$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\,,$$

jeweils ungleich $\vec{0}$.

Die Basis ist ein Rechtssystem, wenn die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert sind (Daumen $\rightarrow$ $\vec{u}$, Zeigefinger $\rightarrow$ $\vec{v}$, Mittelfinger $\rightarrow$ $\vec{w}$), bzw. äquivalent dazu, wenn das Spatprodukt $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ positiv ist.



Sind $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ normiert ($|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}| = 1$), so spricht man von einer Orthonormalbasis.

Analog bilden zwei orthogonale Vektoren $\vec{u} = (u_1, u_2)^{\mathrm{t}}$, $\vec{v} = (v_1, v_2)^{\mathrm{t}}$, jeweils $\neq \vec{0}$, eine orthogonale Basis in der Ebene. Die Basis ist positiv orientiert, wenn $u_1 v_2 - u_2 v_1 > 0$.

Jeder Vektor $\vec{a}$ lässt sich als Linearkombination

$$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}, \quad r = \frac{\vec{a}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|^2},\ s = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2},\ t = \frac{\vec{a}\cdot\vec{w}}{|\vec{w}|^2}\,,$$

darstellen. Die Summanden $\vec{a}_u = r\vec{u}$, $\vec{a}_v = s\vec{v}$, $\vec{a}_w = t\vec{w}$ sind die Projektionen $\vec{a}_u$, $\vec{a}_v$, $\vec{a}_w$, auf die durch die Basisvektoren erzeugten Achsen, d.h.

$$\vec{a}_u \parallel \vec{u}, \quad \vec{a} - \vec{a}_u \perp \vec{u}\,,$$

etc., und in Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras gilt $|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_u|^2 + |\vec{a}_v|^2 + |\vec{a}_w|^2$ bzw.

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= r^2\,|\vec{u}|^2 + s^2\,|\vec{v}|^2 + t^2\,|\vec{w}|^2 \\ &= \frac{|\vec{a}\cdot\vec{u}|^2}{|\vec{u}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|^2}{|\vec{v}|^2} + \frac{|\vec{a}\cdot\vec{w}|^2}{|\vec{w}|^2}\,. \end{aligned}$$

Speziell ist

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

für die kanonische Orthonormalbasis

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

des kartesischen Koordinatensystems.

Beweis

(i) Berechnung der Basis-Koeffizienten:
Multiplikation des Ansatzes

$$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

mit $\vec{u}$ unter Berücksichtigung von $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$, $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}) \cdot \vec{u} = r|\vec{u}|^2$$

und somit $r = \vec{a} \cdot \vec{u}/|\vec{u}|^2$
analoge Berechnung von s und t durch Multiplikation mit $\vec{v}$ und $\vec{u}$ $\quad \rightsquigarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = s|\vec{v}|^2, \quad \vec{a} \cdot \vec{w} = t|\vec{w}|^2$$

(ii) Formel für die Quadratsumme:

$$|\vec{a}|^2 = (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}) \cdot (r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w})$$

Ausmultiplizieren $\rightsquigarrow$

$$|\vec{a}|^2 = r^2|\vec{u}|^2 + s^2|\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2$$

wegen der Orthogonalität der Basisvektoren ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \quad \Longrightarrow \quad (r\vec{u}) \cdot (s\vec{v}) = 0$, $(r\vec{u}) \cdot (t\vec{w}) = 0, \ldots$)

(iii) Projektionen:
$\vec{a}_u = r\vec{u} \quad \Longrightarrow$

$$\vec{a}_u \parallel \vec{u}, \quad (\vec{a} - \vec{a}_u) \cdot \vec{u} = (s\vec{v} + t\vec{w}) \cdot \vec{u} = 0$$

analoge Begründung der Projektionseigenschaft von $\vec{a}_v$ und $\vec{a}_w$

Beispiel

Darstellung des Vektors $\vec{a} = (-4, -2, 5)^{\mathrm{t}}$ bzgl. der orthogonalen Basis

$$\vec{u} = (1, 1, 0)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{v} = (1, -1, 1)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{w} = (-1, 1, 2)^{\mathrm{t}}$$

$\vec{a} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -6/2 = -3 \\
s &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big/ 3 = 1 \\
t &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Big/ 6 = 2
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Basisdarstellung

$$\vec{a} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Probe
Test der Identität für die Quadratsummme der Koeffizienten:
Quadrat des Betrags

$$|\vec{a}|^2 = (-4)^2 + (-2)^2 + 5^2 = 45$$

äquivalente Berechnung als Quadratsumme der Koeffizienten

$$r^2|\vec{u}|^2 + s^2|\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2 = 9 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 45 \quad \checkmark$$

Beispiel

Normierung des Vektors $\vec{u} = (3, -4)^t$, Ergänzung zu einer Orthonormalbasis und Bestimmung der Basis-Koeffizienten von $\vec{a} = (2, 1)^t$

(i) Normierung und Basisergänzung:
$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad \Longrightarrow$

$$\vec{u}^\circ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}$$

Basisergänzung durch Komponentenvertauschung und Vorzeichenänderung

$$\vec{v}^\circ = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

$0 \overset{!}{=} \vec{u}^\circ \cdot \vec{v}^\circ = (3/5)(4/5) + (-4/5)(3/5) \quad \checkmark$

(ii) Basis-Darstellung:
vereinfachte Formeln für die Koeffizienten r, s der Linearkombination

$$\vec{a} = r\vec{u}^\circ + s\vec{v}^\circ, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}^\circ = \begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}, \vec{v}^\circ = \begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

aufgrund der Normierung ($|\vec{u}^\circ| = |\vec{v}^\circ| = 1$)

$$\begin{aligned} r &= \vec{a} \cdot \vec{u}^\circ = 2(3/5) + 1(-4/5) = 2/5 \\ s &= \vec{a} \cdot \vec{v}^\circ = 2(4/5) + 1(3/5) = 11/5 \end{aligned}$$

Probe

$$\vec{a} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix} + \frac{11}{5}\begin{pmatrix} 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/25 + 44/25 \\ -8/25 + 33/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

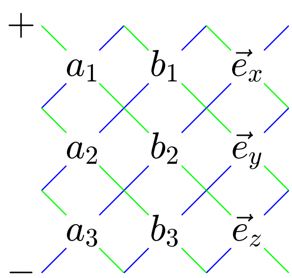
Vektorprodukt

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)^t$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^t$ ist durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

definiert.
Bezeichnet man mit $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$ die kanonischen Einheitsvektoren, so kann die Berechnung mit dem Sarrus-Schema illustriert werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & \\ & +a_1 b_2 \vec{e}_z - a_2 b_1 \vec{e}_z \\ & +a_2 b_3 \vec{e}_x - a_3 b_2 \vec{e}_x \\ & +a_3 b_1 \vec{e}_y - a_1 b_3 \vec{e}_y \end{aligned}$$



Die zyklisch ergänzten Diagonalen des Schemas entsprechen den positiven und negativen Termen.

Das Vektorprodukt ist antisymmetrisch,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}\,,$$

besitzt ansonsten aber die von einem Produkt erwartete Bilinearität:

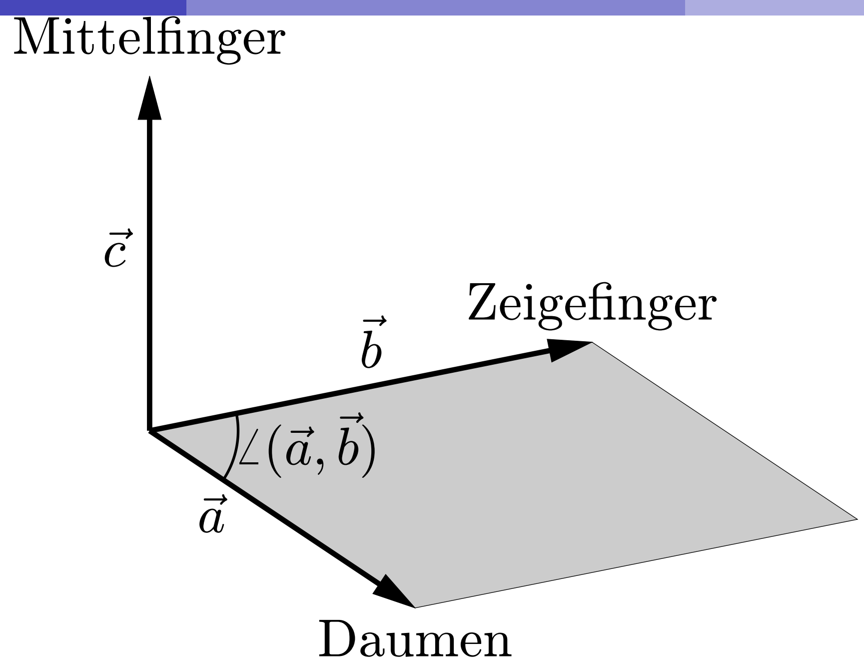
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \quad \vec{a} \times (s\vec{b}) = s(\vec{a} \times \vec{b}) \text{ für } s \in \mathbb{R}\,.$$

Entsprechendes gilt für das erste Argument. Schließlich ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind.

Das Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ lässt sich ebenfalls mit Hilfe der folgenden geometrischen Eigenschaften eindeutig festlegen:
Der Vektor $\vec{c}$ ist zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal, gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert und hat die Länge

$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\,,$$

die dem Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms entspricht.



Beweis

(i) Linearität der geometrischen Definition:
Multiplikation mit Skalaren $\checkmark$
Invarianz unter Drehungen $\rightsquigarrow$ $\vec{a} = \vec{e}_z$
additiv bzgl. des zweiten Arguments, da

$$\vec{c} = \vec{e}_z \times (b_1, b_2, b_3)^t = (-b_2, b_1, 0)^t$$

Begründung:

- $\vec{c} \perp \vec{e}_z, \vec{b}$
- b_3 irrelevant für den Flächeninhalt (Scherung) $\rightsquigarrow$ o.B.d.A. $b_3 = 0$
  $\sphericalangle(\vec{e}_z, \vec{b}) = \pi/2$, $|\vec{e}_z| = 1$ $\rightsquigarrow$ $|\vec{c}|$ $\checkmark$
- richtige Orientierung (prüfe alle Vorzeichenkombinationen der b_k mit der „rechten Hand Regel")

(ii) Übereinstimmung mit der analytischen Definition:
bereits gezeigt für $\vec{a} = \vec{e}_z$, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ analog
Antisymmetrie $\rightsquigarrow$ richtig für $\vec{a} = \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$
Linearität $\rightsquigarrow$ allgemeiner Fall

(iii) Flächeninhalt A des Parallelogramms:
$A = |\vec{b}|\, h$ mit der Höhe

$$h = |\vec{a}| \sin \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

Alternative Herleitung der geometrischen Eigenschaften

(i) Orthogonalität:
Einsetzen der Definition von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ $\rightsquigarrow$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

(jeweils zwei gleiche Produkte mit verschiedenem Vorzeichen)
analog: $\vec{b} \perp \vec{c}$

(ii) Länge:
Vergleich beider Seiten der behaupteten Identität

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$$

Quadrierte linke Seite:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 =$$
$$\left(a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2\right) -$$
$$\left(a_2b_3a_3b_2 + a_3b_2a_2b_3 + a_3b_1a_1b_3 + a_1b_3a_3b_1 + a_1b_2a_2b_1 + a_2b_1a_1b_2\right)$$

Quadrierte rechte Seite:
$\sin^2 = 1 - \cos^2$, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} &|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \\ &= \left(\sum_j a_j^2\right)\left(\sum_k b_k^2\right) - \left(\sum_j a_jb_j\right)\left(\sum_k a_kb_k\right) \\ &= \sum_{j,k,j\neq k} a_j^2b_k^2 - a_jb_ja_kb_k\,, \end{aligned}$$

wegen Aufhebung der Terme $a_\ell^2b_\ell^2$, $-a_\ell b_\ell a_\ell b_\ell$ mit $j = \ell = k$
gleiche 12 Summanden in beiden Fällen

Beispiel

Vektorprodukt $\vec{c}$ der Vektoren $\vec{a} = (2,1,2)^\mathrm{t}$, $\vec{b} = (3,3,0)^\mathrm{t}$

(i) Geometrische Definition:
$\vec{c} \perp \vec{a}, \vec{b} \quad \rightsquigarrow \quad \vec{c} = \lambda(-2,2,1)^\mathrm{t}$
Rechte-Hand-Regel $\quad\Longrightarrow\quad \lambda > 0$
Winkel

$$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{9}{3\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\Longrightarrow \quad \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \pi/4$
Fläche des aufgespannten Parallelogramms

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 3\cdot 3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 9$$

$\rightsquigarrow \quad \lambda = |\vec{c}|/|(-2,2,1)^\mathrm{t}| = 9/3 = 3$, d.h.

$$\vec{c} = \lambda(-2,2,1)^\mathrm{t} = (-6,6,3)^\mathrm{t}$$

(ii) Analytische Definition:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel

Vektorprodukte der kanonischen Basisvektoren

$$\vec{e}_x = (1,0,0)^t,\ \vec{e}_y = (0,1,0)^t,\ \vec{e}_z = (0,0,1)^t$$

$$\begin{array}{lll} \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, & \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, & \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{0}, & \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{0}, & \vec{e}_z \times \vec{e}_z = \vec{0} \end{array}$$

zyklische Verschiebung bei den ersten drei Identitäten

$$x\,y\,z \to y\,z\,x \to z\,x\,y$$

Vorzeichenänderung bei Vertauschung von Basisvektoren, z.B.

$$\vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z$$

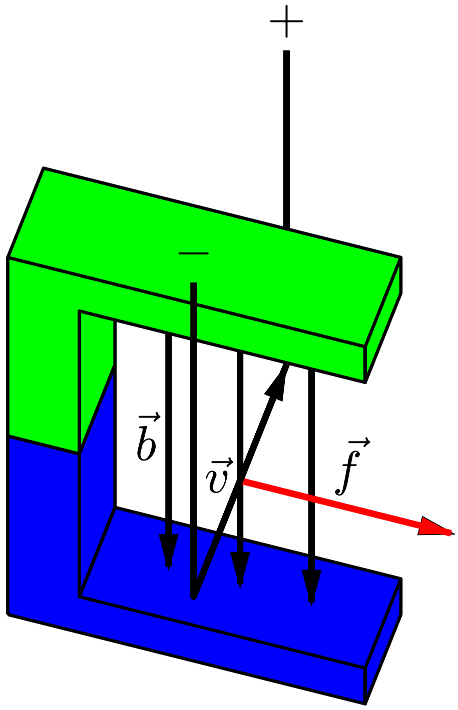
Gültigkeit entsprechender Formeln für eine beliebige, gemäß der Rechten-Hand-Regel orientierte Orthonormalbasis

Beispiel

Lorentzkraft für ein Elektron mit Ladung $-e$ und Geschwindigkeit $\vec{v}$ in einem Magnetfeld $\vec{b}$

Auslenkung des stromdurchflossenen Leiters in Richtung

$$\vec{f} = e\,\vec{b} \times \vec{v}$$



Regeln für Vektorprodukte

Für Vektorprodukte gelten die folgenden Rechenregeln:

- Antisymmetrie

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\left(\vec{b} \times \vec{a}\right), \quad \vec{a} \times (s\vec{a}) = \vec{0}$$

- Bilinearität

$$\left(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2\right) \times \left(\beta_1 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2\right) = \\ \alpha_1\beta_1\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_1\beta_2\left(\vec{a}_1 \times \vec{b}_2\right) + \alpha_2\beta_1\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_1\right) + \alpha_2\beta_2\left(\vec{a}_2 \times \vec{b}_2\right)$$

- Grassmann-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a}$$

- Lagrange-Identität

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Beweis

(i) Antisymmetrie und Bilinearität: ✓

(ii) Grassmann- und Lagrange-Identität:
Bilinearität $\rightsquigarrow$ o.B.d.A. $\vec{a}$, $\vec{b}$ kanonische Basisvektoren
$\vec{a} = \vec{e}_x = \vec{b}$: beide Seiten der Identitäten Null
$\vec{a} = \vec{e}_x$, $\vec{b} = \vec{e}_y$:
linke Seite der Grassmann-Identität

$$(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Übereinstimmung mit rechter Seite $c_1\vec{e}_y - c_2\vec{e}_x$

Lagrange-Identität im betrachteten Spezialfall

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ c_1 d_2 - c_2 d_1 \end{pmatrix} = c_1 d_2 - d_1 c_2$$

analoge Argumentation für andere Kombinationen von Basisvektoren

Beispiel

Anwendungen der Regeln für Vektorprodukte

(i) Ausnutzung der Bilinearität bei parallelen Vektoren:

$$\left(3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 6\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (6-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 0-2 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei neben der Bilinearität die Antisymmetrie ($\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$) verwendet wurde

(ii) Darstellung von Vektorprodukten mit Hilfe von einfacher berechenbaren Skalarprodukten:

- Grassmann-Identität: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\,\vec{a} \quad \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

- Lagrange-Identität: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad \rightsquigarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0 \cdot 6 - 12 \cdot 1 = -12$$

Epsilon-Tensor

Der Epsilon-Tensor

$$\varepsilon_{i,j,k} \in \{-1, 0, 1\}, \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\},$$

ist Null bei zwei gleichen Indizes und hat für paarweise verschiedene Indizes die Werte

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1,2,3} &= \varepsilon_{2,3,1} = \varepsilon_{3,1,2} = 1, \\ \varepsilon_{1,3,2} &= \varepsilon_{2,1,3} = \varepsilon_{3,2,1} = -1. \end{aligned}$$

Er ist also invariant unter zyklischer Permutation und ändert bei Vertauschung von Indizes das Vorzeichen.

Beispiel

Darstellung des Vektorproduktes mit Hilfe des Epsilon-Tensors

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad c_i = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_j b_k$$

Überprüfung der ersten Komponente c_1 $(i = 1)$:
nur 2 Summanden, da $\varepsilon_{1,j,k} = 0$ für $j = 1$, $k = 1$ oder $j = k$, d.h.

$$c_1 = \underbrace{\varepsilon_{1,2,3}}_{1} a_2 b_3 + \underbrace{\varepsilon_{1,3,2}}_{-1} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \quad \checkmark$$

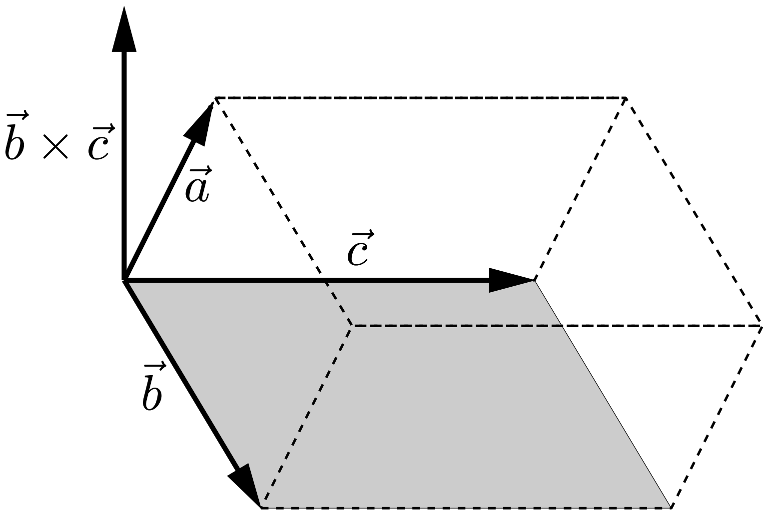
Überprüfung von c_2, c_3 analog

Spatprodukt

Das Spatprodukt

$$\left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

stimmt bis auf Vorzeichen mit dem Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Spats überein. Es ist positiv, wenn die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ gemäß der Rechten-Hand-Regel orientiert sind.



Mit Hilfe des ε-Tensors lässt sich das Spatprodukt auch in der Form

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{i,j,k} a_i b_j c_k$$

schreiben.

Eine weitere äquivalente Darstellung ist die Determinante der aus den drei Vektoren gebildeten Matrix:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Beweis

Herleitung der geometrischen Interpretation als Volumen:
Normale des von $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Parallelogramms

$$\vec{d} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|}$$

Höhe des Spats (Länge der Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{d}$)

$$h = |\vec{a}| \left| \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{d}) \right| = |\vec{a} \cdot \vec{d}| \,,$$

da $|\vec{d}| = 1$
Volumen (Produkt aus Höhe h des Spats und Flächeninhalt $|\vec{b} \times \vec{c}|$ des Parallelogramms)

$$\left| \vec{a} \cdot \left(\frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \right) \right| |\vec{b} \times \vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

Beispiel

Oberfläche und Volumen des von den Vektoren

$$\vec{a} = (0,1,0)^\mathrm{t}, \quad \vec{b} = (2,0,3)^\mathrm{t}, \quad \vec{c} = (3,1,2)^\mathrm{t}$$

aufgespannten Spats

(i) Oberfläche:
$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \rightsquigarrow \quad$ Rechteck $\quad \rightsquigarrow \quad F_{ab} = 1 \cdot \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$
Scherung ($\vec{c} \to \vec{c} - \vec{a}$) und Permutation $\quad \rightsquigarrow \quad F_{ac} = F_{ab}$

$$F_{bc} = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+25+4} = \sqrt{38}$$

Oberfläche: $2F_{ab} + 2F_{ac} + 2F_{bc} = 4\sqrt{13} + 2\sqrt{38} \approx 26.75$

(ii) Volumen: $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 5$

Eigenschaften des Spatprodukts

Das Spatprodukt ist linear in jedem Argument und besitzt darüber hinaus die folgenden weiteren Eigenschaften.

- zyklische Vertauschung:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$$

- lineare Abhängigkeit:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{0} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

  mit mindestens einem der Skalare α, β, γ ungleich 0.

- Orientierung:

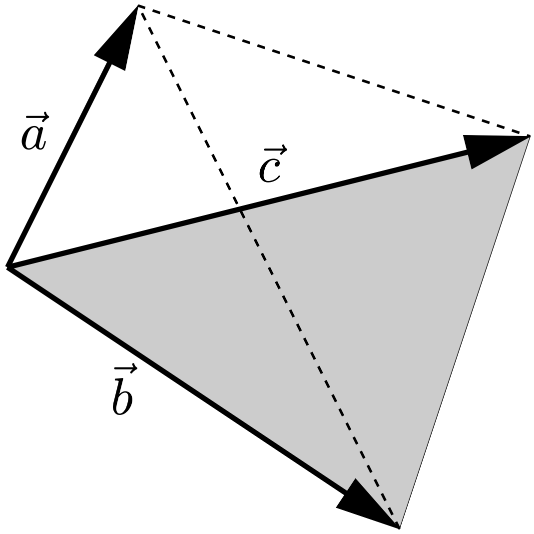
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] > 0$$

  für jedes Rechtssystem.

Volumen eines Tetraeders

Das Volumen V eines Tetraeders, der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, lässt sich mit Hilfe des Spatproduktes berechnen:

$$V = \frac{1}{6}|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]| = \frac{1}{6}|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|\,.$$



Beweis

Volumen eines Tetraeders:

$$V = \frac{1}{3}Gh$$

mit h der Höhe und G dem Inhalt der Grundfläche des von den Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ aufgespannten Dreiecks

G: halbe Parallelogrammfläche $\quad\rightsquigarrow$

$$G = G_{\text{Spat}}/2$$

und

$$V = \frac{1}{6}\,G_{\text{Spat}}h = \frac{1}{6}\,V_{\text{Spat}} = \frac{1}{6}\,|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$$

mit dem Spatvolumen V_{Spat}

Beispiel

Volumen eines von den Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Tetraeders

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]\right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| \\ &= \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Berechnung von Koordinaten mit Hilfe des Spatprodukts

Spannen die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ein echtes Spat auf ($[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0$), so lässt sich ein beliebiger Vektor $\vec{x}$ als Linearkombination

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

darstellen mit den Koeffizienten

$$r = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = \frac{\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}{\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})}, \quad s = \frac{[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}, \quad t = \frac{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}\,.$$

Beweis

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

Skalarprodukt mit $\vec{v} \times \vec{w}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\vec{x} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = r\,\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

denn $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 = \vec{w} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$r = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$$

analoge Berechnung von s und t, z.B.

$$\vec{x} \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) = (s\vec{v}) \cdot (\vec{u} \times \vec{w}) \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{[\vec{x}, \vec{u}, \vec{w}]}{[\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}]} = \frac{[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]},$$

da sich bei Vertauschung von Vektoren das Vorzeichen des Spatprodukts ändert

Beispiel

Darstellung des Vektors $\vec{x} = (-2, 8, 2)^{\mathrm{t}}$ als Linearkombination der Basisvektoren

$$\vec{u} = (2, 0, 2)^{\mathrm{t}},\ \vec{v} = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}},\ \vec{w} = (0, 1, 1)^{\mathrm{t}}$$

Spatprodukte

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -6$$

analog

$$[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}] = 8, \quad [\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}] = 8$$

$\rightsquigarrow$ Linearkombination

$$\vec{x} = r\vec{u} + s\vec{v} + t\vec{w}$$

mit den Koeffizienten

$$r = \frac{[\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = -\frac{6}{2} = -3,\ s = \frac{[\vec{u}, \vec{x}, \vec{w}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = \frac{8}{2} = 4,\ t = \frac{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}]}{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]} = \frac{8}{2} = 4$$

Probe

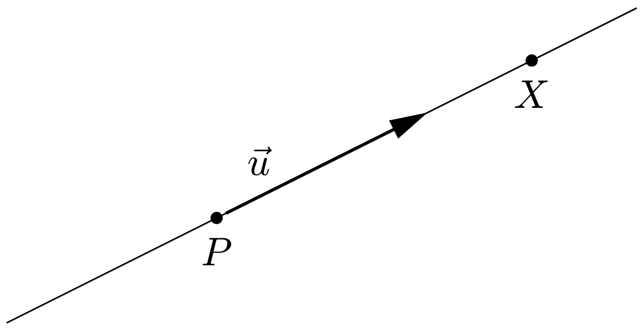
$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Punkt-Richtungs-Form einer Geraden

Die Punkte X auf einer Geraden durch P mit Richtung $\vec{u}$ lassen sich in parametrischer Form durch

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}$$

darstellen.



Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + tu_i, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

für die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$.

Beispiel

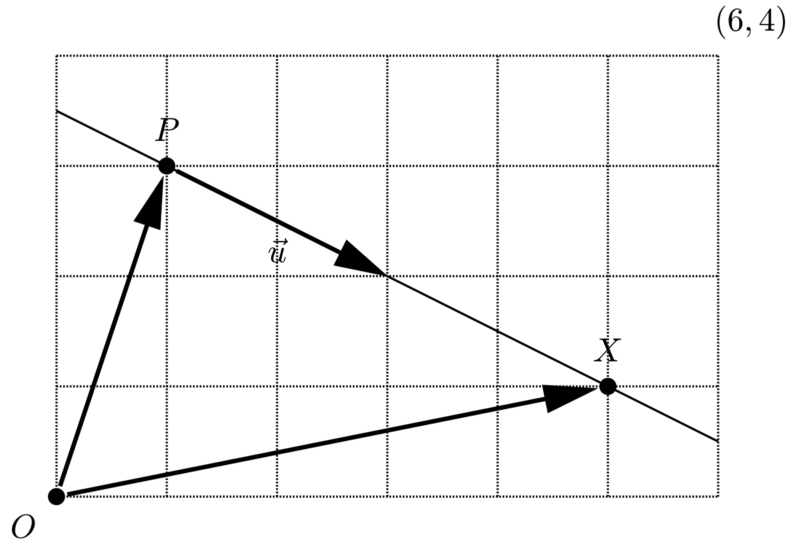
Illustration der Punkt-Richtungs-Form der Geraden

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$\rightsquigarrow$ Ortsvektor $\vec{x}$ des Punktes X zum Parameter $t = 2$

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \overrightarrow{OX} = \vec{p} + t\vec{u} \\ &= (1,3)^{\mathrm{t}} + 2(2,-1)^{\mathrm{t}} \\ &= (5,1)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$



Zwei-Punkte-Form einer Geraden

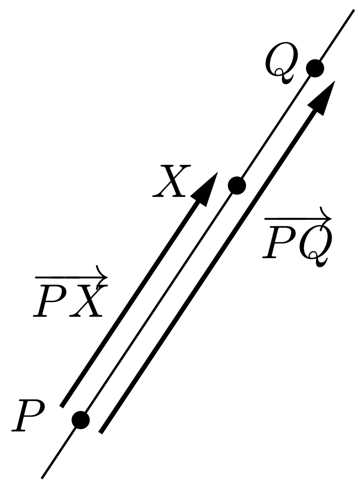
Die Punkte X auf einer Geraden durch zwei Punkte $P \neq Q$ lassen sich in der Form

$$\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R},$$

darstellen, d.h. $\overrightarrow{PX}$ ist parallel zu $\overrightarrow{PQ}$. Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + t(q_i - p_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

für die Koordinaten des Ortsvektors $\vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p})$.



Die Parameterwerte $t \in [0, 1]$ entsprechen der Strecke $\overline{PQ}$, die durch den Punkt X im Verhältnis $t : (1 - t)$ geteilt wird.

Beispiel

Illustration der Zwei-Punkte-Form der Geraden durch die Punkte

$$P = (1,3), \quad Q = (5,1)$$

Zwei-Punkte-Form

$\overrightarrow{(1,3)X} = t\,\overrightarrow{(1,3)(5,1)} = t\begin{pmatrix} 5-1 \\ 1-3 \end{pmatrix}$

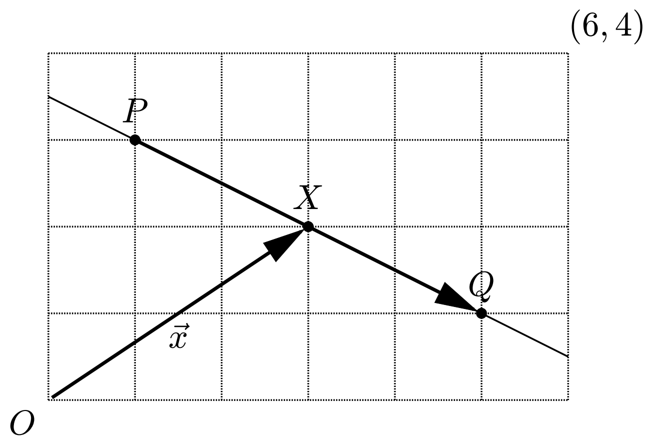
d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 3 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

bzw. in Punkt-Richtungs-Form

$$\vec{x} = (1,3)^{\mathrm{t}} + t\,(4,-2)^{\mathrm{t}}$$

$t = 1/2 \quad \Longrightarrow \quad X = (3,2)$ ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{PQ}$
(Teilverhältnis $t : (1-t)$)

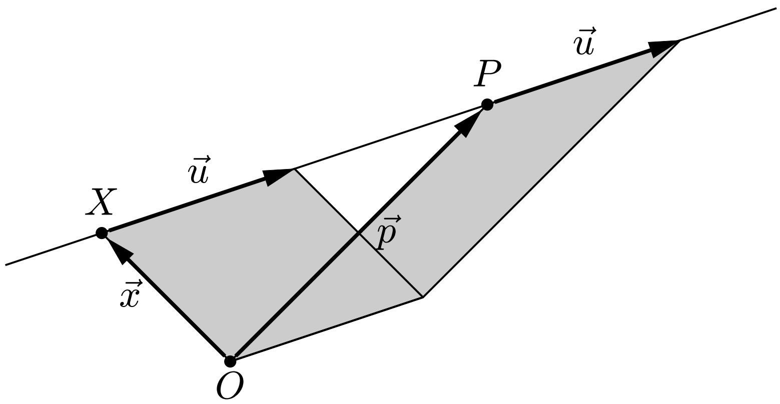


Momentenform einer Geraden im Raum

Die Punkte X auf einer Geraden g durch den Punkt P mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ lassen sich durch

$$\overrightarrow{PX} \times \vec{u} = \vec{0}$$

beschreiben, d.h. für alle Punkte $X \in g$ ist $\overrightarrow{PX}$ parallel zu $\vec{u}$.



Nach Einsetzen von $\overrightarrow{PX} = \vec{x} - \vec{p}$ erhält man für die Ortsvektoren

$$\vec{x} \times \vec{u} = \vec{c}, \quad \vec{c} = \vec{p} \times \vec{u}\,,$$

d.h. eine Übereinstimmung der Flächeninhalte der Parallelogramme, die durch Scherung ineinander übergehen.

Beipiel

Punktprobe ($X \in g$, $Y \in g$?) für die Gerade g durch den Punkt $P = (2, 0, -1)$ mit Richtungsvektor $\vec{u} = (-3, 1, 2)^{\mathrm{t}}$ und $X = (-4, 2, 3)$, $Y = (-3, 2, 4)$

$Z \in g \Leftrightarrow \overrightarrow{PZ} \times \vec{u} = \vec{0}$ bzw. alternativ $Z \in g \Leftrightarrow \exists$ Lösung t des überbestimmten Gleichungssystems $\vec{z} - \vec{p} = t\vec{u}$

(i) Punkt $X = (-3, 1, 2)$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PX} \times \vec{u} &= \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 \\ (-6) \cdot 1 - 2 \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad X \in g$

(ii) Punkt $Y = (-3, 2, 4)$:

$$\vec{y} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ überbestimmtes Gleichungssystem $\vec{y} - \vec{p} = t\vec{u}$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

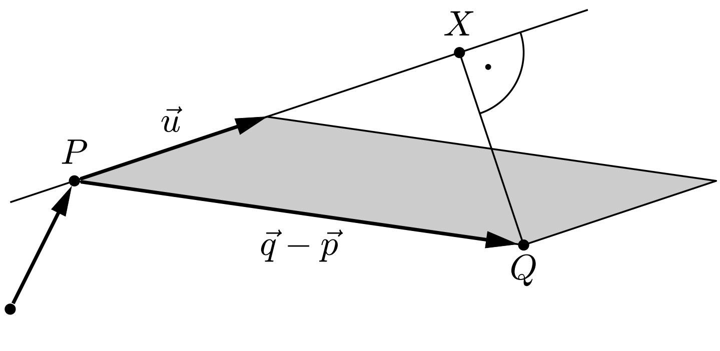
zweite Komponente $\quad \Longrightarrow \quad t = 1/2$
inkonsistent zur ersten Komponente: $-5 \neq (1/2) \cdot (-3)$, d.h. $Y \notin g$

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Die Projektion X eines Punktes Q auf eine Gerade durch den Punkt P mit Richtungsvektor $\vec{u}$ erfüllt

$$\overrightarrow{PX} = t\vec{u} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$$

mit $t = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} \,/\, |\vec{u}|^2$.



Der Abstand $d = |\overrightarrow{XQ}|$ lässt sich ebenfalls direkt berechnen:

$$d = |(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}| \;/\; |\vec{u}|\,,$$

wobei für eine Gerade in der Ebene das Vektorprodukt $(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}$ durch die Determinante

$$\det(\vec{q} - \vec{p}, \vec{u}) = (q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1$$

zu ersetzen ist.

Beweis

(i) Projektion X, $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$:
X am nächsten zu Q $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\vec{q} - \vec{x} \perp \vec{u}$
$\rightsquigarrow$ prüfe die Orthogonalität von $\overrightarrow{XQ} = \vec{q} - \vec{x}$ zu $\vec{u}$
Einsetzen von $t = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}/|\vec{u}|^2$ in $0 \stackrel{!}{=} (\vec{q} - \underbrace{(\vec{p} + t\vec{u})}_{\vec{x}}) \cdot \vec{u}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{XQ} \cdot \vec{u} &= \left(\vec{q} - \left(\vec{p} + \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,\vec{u}\right)\right) \cdot \vec{u} \\ &= (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} - \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|^2}\,|\vec{u}|^2 = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(ii) Abstand für Geraden im Raum:
Dreieck $\Delta(X, P, Q)$ rechtwinklig mit Kathete $\overline{XQ}$ und Hypothenuse $\overline{PQ}$
$\Longrightarrow$

$$d = |\vec{q} - \vec{x}| = |\vec{q} - \vec{p}|\, \sin\sphericalangle(\vec{q} - \vec{p}, \vec{u})$$

und Ersetzen des Sinus mit der Formel für die Länge eines Vektorprodukts, $|\vec{v} \times \vec{u}| = |\vec{v}|\,|\vec{u}|\,\sin\sphericalangle(\vec{v}, \vec{u})$, mit $\vec{v} = \vec{q} - \vec{p}$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Ausdruck für den Abstand d

(iii) Gerade in der Ebene:
Ergänzen der Koordinaten der Punkte und Vektoren durch eine dritte Komponente 0 $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} d &= |(q_1 - p_1)u_2 - (q_2 - p_2)u_1| / |(u_1, u_2, 0)| \\ &= |\det(\vec{q} - \vec{p}, \vec{u})| / |\vec{u}| \end{aligned}$$

Beispiel

Projektion von $Q = (3, 3, 3)$ auf die Gerade

$$g : (2, 1, 3)^{\mathrm{t}} + t(1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$$

und Abstand von Q zu g

(i) Projektion X:
Ortsvektor $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$ mit $t = (\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} / |\vec{u}|^2$, d.h.

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{1^2 + 1^2 + 1^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Abstand d:

$$d = \left|\overrightarrow{XQ}\right| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2}$$

alternative Berechnung mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{|(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Einsetzen von $\vec{q} - \vec{p} = (3-2, 3-1, 3-3)^t = (1,2,0)^t$ und $\vec{u} = (1,1,1)^t$
$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{|(1,1,1)^t|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2-0\\0-1\\1-2\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{4+1+1}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

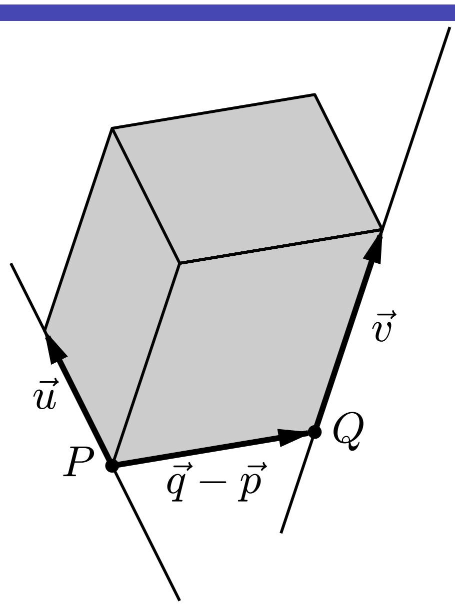
Abstand zweier Geraden

Die durch die Punkte P, Q und Richtungen $\vec{u}$, $\vec{v}$ gegebenen, nicht parallele Geraden im Raum mit den Parametrisierungen

$$\begin{aligned} g: \quad \vec{x} &= \vec{p} + s\vec{u}, \\ h: \quad \vec{y} &= \vec{q} + t\vec{v} \end{aligned}$$

$(s, t \in \mathbb{R})$ haben den Abstand

$$d = \frac{\left|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{\left|(\vec{p} - \vec{q}) \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}.$$



Ist das Spatprodukt $[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]$ null, so schneiden sich die Geraden.

Die Punkte X, Y kürzesten Abstands erhält man nach Einsetzen der Parametrisierungen in die Orthogonalitätsbedingungen

$$\vec{y}-\vec{x} \perp \vec{u}, \quad \vec{y}-\vec{x} \perp \vec{v}$$

durch Lösen des resultierenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned}
(\vec{u}\cdot\vec{u})s-(\vec{v}\cdot\vec{u})t &= (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{u}\\
(\vec{u}\cdot\vec{v})s-(\vec{v}\cdot\vec{v})t &= (\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{v},
\end{aligned}$$

für die Parameter s, t.

Für parallele Geraden gilt

$$d=\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{u}\right|/\left|\vec{u}\right|.$$

Man bezeichnet zwei Geraden als windschief, wenn sie nicht parallel sind und einen positiven Abstand haben.

Beweis

(i) Nicht parallele Geraden ($\vec{u}\neq\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v}\neq\vec{0}$):

Ortsvektoren der Punkte kürzesten Abstands und Differenzvektor

$$\vec{x}=\vec{p}+s\vec{u},\ \vec{y}=\vec{q}+t\vec{v}, \quad \overrightarrow{XY}=(\vec{q}-\vec{p})+t\vec{v}-s\vec{u}$$

Orthogonalität von $\overrightarrow{XY}$ zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\quad\Longrightarrow$

$$\overrightarrow{XY} \quad \| \quad \vec{c}=\vec{u}\times\vec{v}$$

Berechnung von $|\overrightarrow{XY}|$ als Betrag des Skalarproduktes mit dem parallelen Einheitsvektor $\vec{c}/|\vec{c}|$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
d &= |\overrightarrow{XY}|=|((\vec{q}-\vec{p})+t\vec{v}-s\vec{u})\cdot(\vec{c}/|\vec{c}|)|=|(\underbrace{\vec{q}-\vec{p}}_{\overrightarrow{PQ}})\cdot(\vec{c}/|\vec{c}|)|\\
&= |\overrightarrow{PQ}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|/|\vec{u}\times\vec{v}|=|[\overrightarrow{PQ},\vec{u},\vec{v}]|/|\vec{u}\times\vec{v}|,
\end{aligned}$$

da $\vec{c}\perp\vec{u}$, $\vec{c}\perp\vec{v}$ $\quad\Longrightarrow\quad$ $\vec{u}\cdot\vec{c}=0$, $\vec{v}\cdot\vec{c}=0$ und nach Definition des Spatprodukts

Einsetzen von

$$\overrightarrow{XY} = (\vec{q} + t\vec{v}) - (\vec{p} + s\vec{u})$$

in die Orthogonalitätsbedingung $\overrightarrow{XY} \cdot \vec{u} = 0 \quad \rightsquigarrow$

$$(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{u} + t\vec{v} \cdot \vec{u} - s\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$$

Umformung $\quad \rightsquigarrow \quad$ erste Gleichung des linearen Gleichungssystems für s, t

analog: $\overrightarrow{XY} \cdot \vec{v} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ zweite Gleichung

(ii) Parallele Geraden ($\vec{u} = \lambda\vec{v}$):

$d = |\vec{y} - \vec{x}|$ mit

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u}, \quad \vec{y} = \vec{q} + t\vec{v}$$

den Ortsvektoren von Punkten kürzesten Abstandes

$(\vec{y} - \vec{x}) \perp \vec{u} \quad \Longrightarrow$

$$|(\vec{y} - \vec{x}) \times \vec{u}| = |\vec{y} - \vec{x}|\,|\vec{u}|\,\overbrace{\sin(\underbrace{\sphericalangle(\vec{y} - \vec{x}, \vec{u})}_{\pi/2})}^{1}$$

nach der Formel für den Betrag eines Vektorprodukts

$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$ und $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{0}$, da $\vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} d &= |\vec{y} - \vec{x}| = |(\vec{y} - \vec{x}) \times \vec{u}|/|\vec{u}| \\ &= |(\vec{q} + t\vec{v} - \vec{p} - s\vec{u}) \times \vec{u}|/|\vec{u}| = |(\vec{q} - \vec{p}) \times \vec{u}|/|\vec{u}| \end{aligned}$$

Beispiel

Bestimmung des Abstands d sowie nächstgelegener Punkte X, Y für die Geraden

$$g:\ \vec{x} = (1,1,3)^{\mathrm{t}} + s(1,2,1)^{\mathrm{t}}, \quad h:\ \vec{y} = (4,1,4)^{\mathrm{t}} + t(1,-2,1)^{\mathrm{t}}$$

nicht parallele Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Anwendung der Formeln für nicht parallele Geraden mit den Punkten

$$P = (1,1,3), \quad Q = (4,1,4)$$

und den Richtungsvektoren

$$\vec{u} = (1,2,1)^{\mathrm{t}}, \quad \vec{v} = (1,-2,1)^{\mathrm{t}}$$

(i) Abstand:

$$d = \frac{|[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}]|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

Betrag des Vektorprodukts im Nenner

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (1-1)^2 + ((-2)-2)^2} = 4\sqrt{2}$$

Betrag des Spatprodukts im Zähler

$$\left| \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 8$$

Einsetzen $\quad\rightsquigarrow\quad d = 8/(4\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

(ii) Punkte kürzesten Abstands:
$\vec{y} - \vec{x} \perp (1,2,1)^t$, $\vec{y} - \vec{x} \perp (1,-2,1)^t \quad \Leftrightarrow \quad$ lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= \Big(\big(\underbrace{(4,1,4)^t + t(1,-2,1)^t}_{\vec{y}} \big) - \big(\underbrace{(1,1,3)^t + s(1,2,1)^t}_{\vec{x}} \big) \Big) \cdot (1,2,1)^t \\ &= 10 - 2t - 6 - 6s \\ 0 &= \Big(\big((4,1,4)^t + t(1,-2,1)^t \big) - \big((1,1,3)^t + s(1,2,1)^t \big) \Big) \cdot (1,-2,1)^t \\ &= 6 + 6t - 2 + 2s \end{aligned}$$

Lösung $s = 1,\ t = -1 \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{x} = (1,1,3)^t + 1 \cdot (1,2,1)^t = (2,3,4)^t, \quad \vec{y} = (3,3,3)^t$$

Probe
Vergleich mit dem berechneten Abstand

$$\sqrt{2} \overset{!}{=} d = |\vec{y} - \vec{x}| = |(1,0,-1)^t| = \sqrt{1+0+1} \quad \checkmark$$

Beispiel

Bestimmung des Abstands d sowie nächstgelegener Punkte X, Y für die Geraden

$$g:\ \vec{x} = (-1,2,1)^t + s(-3,3,-6)^t, \quad h:\ \vec{y} = (2,-1,4)^t + t(2,-2,4)^t$$

parallele Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Anwendung der Formeln für parallele Geraden mit den Punkten

$$P = (-1,2,1), \quad Q = (2,-1,4)$$

und den Richtungsvektoren

$$\vec{u} = (-3,3,-6)^t, \quad \vec{v} = (2,-2,4)^t$$

(i) Abstand:

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|}$$

Betrag des Vektorprodukts im Zähler

$$\left|\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -1-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{81+81+0} = 9\sqrt{2}$$

Betrag des Richtungsvektors im Nenner

$$|(-3,3,-6)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{9+9+36} = 3\sqrt{6}$$

Einsetzen $\leadsto$

$$d = \frac{9\sqrt{2}}{3\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

(ii) Punkte kürzesten Abstandes:
gleiche Abstände für alle Punkte X auf g
$\leadsto$ wähle $X = P = (-1,2,1) \in g$ zur Bestimmung eines nächstgelegenen Punkts $Y \in h$
$\vec{y} - \vec{p} \perp \vec{u} \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= (\vec{y}-\vec{p}) \cdot \vec{u} \\ &= ((2,-1,4)^{\mathrm{t}} + t(2,-2,4)^{\mathrm{t}} - (-1,2,1)^{\mathrm{t}}) \cdot (-3,3,-6)^{\mathrm{t}} \\ &= -33 - 36t - 3 = 0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Lösung $t = -1 \quad \leadsto$

$$\vec{y} = (2,-1,4)^{\mathrm{t}} - (2,-2,4)^{\mathrm{t}} = (0,1,0)^{\mathrm{t}}$$

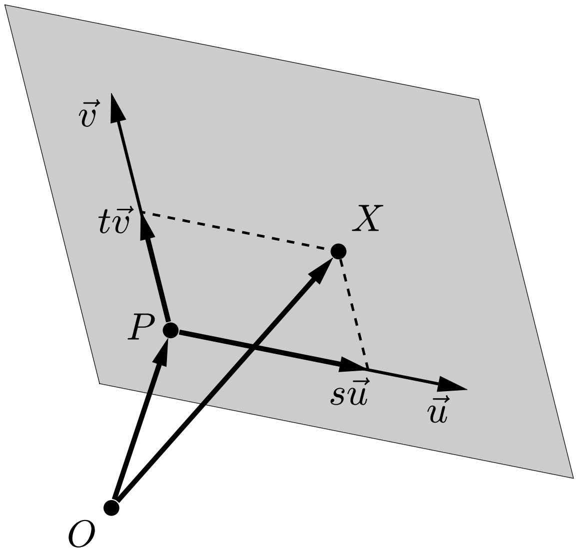
Probe
Vergleich mit dem berechneten Abstand

$$\sqrt{3} \stackrel{!}{=} d = |\overrightarrow{PY}| = |(0-(-1), 1-2, 0-1)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{1+1+1} \quad \checkmark$$

Parameterdarstellung einer Ebene

Die Punkte X auf einer Ebene durch einen Punkt P, die von zwei nicht parallelen Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird, erfüllen

$$\overrightarrow{PX} = s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}\,.$$



Entsprechend gilt

$$x_i = p_i + su_i + tv_i, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

für die Koordinaten der Ortsvektoren $\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$.

Beispiel

Punktprobe ($(2, -1, 0) \in E$?, $(0, -1, 2) \in E$?) für die Ebene E durch den Punkt $P = (1, 2, 3)$, aufgespannt von den Vektoren $\vec{u} = (2, 0, 0)^{\mathrm{t}}$, $\vec{v} = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$

Parameterdarstellung

$$E: (s, t) \mapsto \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$X \in E \quad \Leftrightarrow$

$\exists$ Lösung (s, t) des überbestimmten Gleichungssystems

$$\vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}$$

oder (alternativ)

$\vec{x} - \vec{p}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ spannen kein echtes Spat auf ($\Leftrightarrow$ liegen in einer Ebene), d.h.

$$[\vec{x} - \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}] = 0$$

(i) $X = (2, -1, 0)$:
Einsetzen in die Parameterdarstellung $\rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösen des überbestimmten linearen Gleichungssystems
zweite Komponente: $-1 = 2 + t \quad \Longrightarrow \quad t = -3$
erste Komponente: $2 = 1 + 2s + (-3) \quad \Longrightarrow \quad s = 2$
konsistent mit dritter Komponente: $0 = 3 + 0 + (-3)$
$\Longrightarrow \quad X \in E$

(ii) $X = (0, -1, 2)$:
Anwendung des Spatprodukt-Kriteriums

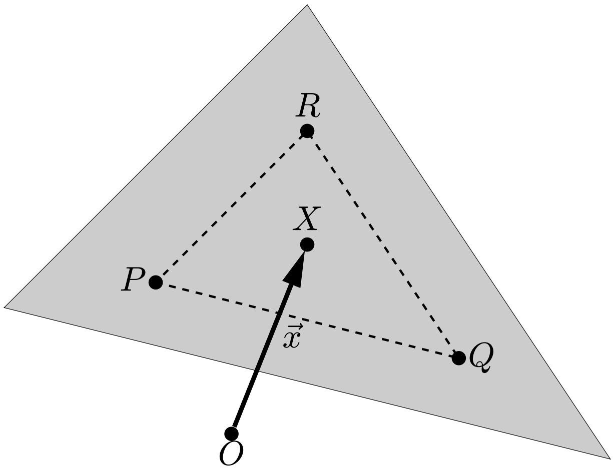
$$\begin{aligned} 0 \quad \stackrel{!}{=} \quad [\vec{x} - \vec{p}, \vec{u}, \vec{v}] &= \begin{pmatrix} 0-1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad X \notin E$

Drei-Punkte-Form einer Ebene

Eine Ebene E kann durch drei Punkte P, Q, R, die ein echtes Dreieck bilden, festgelegt werden. Es gilt dann für die Ortsvektoren der Punkte X

$$x \in E \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}] = 0\,.$$



Das Spatprodukt lässt sich auch als Determinante schreiben, und man erhält das Kriterium

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 & x_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & x_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Entwickeln der Determinante nach der letzten Spalte führt auf die folgende explizite Form der Ebenengleichung

$$x_1 \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}\,.$$

Die 3×3-Determinanten können mit der Sarrus-Regel berechnet werden. Beispielsweise ist der Faktor von x_1 gleich

$$p_2 q_3 + q_2 r_3 + r_2 p_3 - p_2 r_3 - q_2 p_3 - r_2 q_3\,.$$

Schließlich erhält man durch Anwendung der Regeln für Spatprodukte und Determinanten eine Reihe äquivalenter Kriterien, z.B.

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{p}-\vec{x}, \vec{q}-\vec{x}, \vec{r}-\vec{x}] = 0\,.$$

Dabei können $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ beliebig vertauscht werden.

Beweis

(i) Geometrische Interpretation:
$\vec{q}-\vec{p} \not\parallel \vec{r}-\vec{p}$ (echtes Dreieck) $\quad\Longrightarrow$

$[\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x}-\vec{p}$ liegt in der Ebene des Dreiecks, d.h. $X \in E$

(ii) Äquivalenz der Kriterien:
Invarianz von Determinanten bei Subtraktion von Spalten $\quad\Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q}-\vec{p} & \vec{r}-\vec{p} & \vec{x}-\vec{p} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Die erste Spalte wurde von den anderen Spalten abgezogen.

Entwickeln der Determinante nach der letzten Zeile (nur ein Term wegen der Nullen) $\quad\rightsquigarrow$

$$(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} \vec{q}-\vec{p} & \vec{r}-\vec{p} & \vec{x}-\vec{p} \end{vmatrix} = -[\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}]$$

aufgrund der Darstellung des Spatprodukts als Determinante

Das Vorzeichen des Spatprodukts ist bei dem Kriterium $[\ldots] = 0$ irrelevant.

(iii) Umformung des Spatprodukts:
Linearität des Spatprodukts bzgl. jedes Arguments $\quad\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} &[\vec{p}-\vec{x}, \vec{q}-\vec{x}, \vec{r}-\vec{x}] = \\ &\quad [\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] - [\vec{p}, \vec{q}, \vec{x}] - [\vec{p}, \vec{x}, \vec{r}] + [\vec{p}, \vec{x}, \vec{x}] - \\ &\quad [\vec{x}, \vec{q}, \vec{r}] + [\vec{x}, \vec{q}, \vec{x}] + [\vec{x}, \vec{x}, \vec{r}] - [\vec{x}, \vec{x}, \vec{x}]\,, \end{aligned}$$

analog zum Ausmultiplizieren eines Produktes $(a+b)(c+d)(e+f)$

Verschwinden des Spatprodukts bei zwei gleichen Argumenten sowie Vorzeichenänderung bei Vertauschung und Invarianz unter zyklischer Permutation von Argumenten $\quad\rightsquigarrow\quad$ Vereinfachung

$$\begin{aligned} &[\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}] + [\vec{x}, \vec{q}, \vec{p}] + [\vec{x}, \vec{p}, \vec{r}] - [\vec{x}, \vec{q}, \vec{r}] = \\ &\quad [\vec{q}, \vec{r}, \vec{p}] + [\vec{q}, \vec{p}, \vec{x}] + [\vec{p}, \vec{r}, \vec{x}] - [\vec{q}, \vec{r}, \vec{x}] \end{aligned}$$

bis auf das andere Vorzeichen (irrelevant für das Kriterium $[\ldots] = 0$) gleiche Terme wie beim Ausmultiplizieren von $[\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}]$

Beispiel

Punktproben für die Ebene E durch $P = (1,2,3)$, $Q = (3,2,3)$, $R = (2,3,4)$ sowie Aufstellen der Ebenengleichung

Testen von $X \in E$ mit den beiden äquivalenten Kriterien
(i) Spatprodukt-Kriterium für $X = (1,1,2)$:
$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad [\vec{q}-\vec{p}, \vec{r}-\vec{p}, \vec{x}-\vec{p}] = 0$
Einsetzen und die Definition des Spatprodukts $\rightsquigarrow$

$$\left[\begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-2 \\ 3-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ ? \\ ? \end{pmatrix} = 0$$

$\Longrightarrow \quad X \in E$
(Die Einträge „?“ brauchen nicht berechnet zu werden.)

(ii) Determinanten-Kriterium für $X = (2,0,0)$:
$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
Einsetzen und Entwickeln nach der letzten Spalte $\rightsquigarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} \cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

erste Determinante null wegen zwei gleicher Spalten
Berechnung der zweiten Determinante mit dem Sarrus-Schema $\rightsquigarrow$

$$0 + (8 + 27 + 12 - 9 - 24 - 12) = 2 \neq 0$$

$\Longrightarrow \quad X \notin E$

(iii) Ebenengleichung:

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \begin{vmatrix} \vec{p} & \vec{q} & \vec{r} & \vec{x} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Einsetzen und Entwickeln nach der letzten Spalte $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & x_1 \\ 2 & 2 & 3 & x_2 \\ 3 & 3 & 4 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -x_1 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2x_2 - 2x_3 + 2\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$E:\ x_3 - x_2 = 1$$

Hesse-Normalform einer Ebene

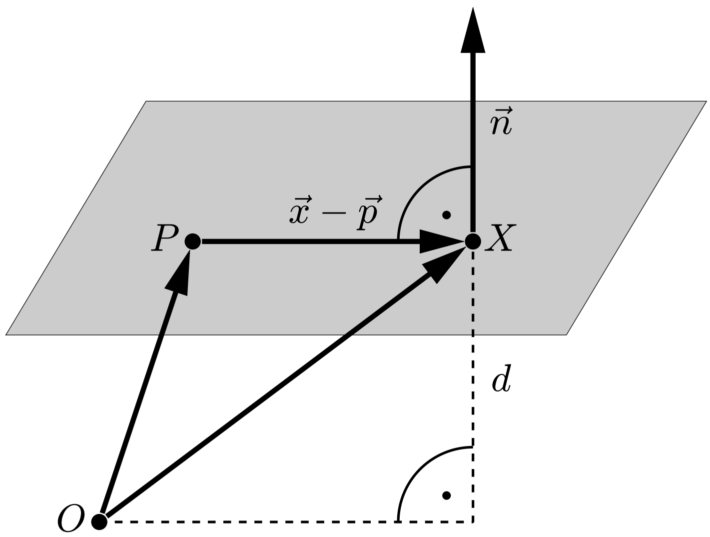
Der Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes X auf einer Ebene E durch einen Punkt P orthogonal zu einem Normalenvektor $\vec{n}$ erfüllt

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = d, \qquad d = \vec{p} \cdot \vec{n}$$

bzw.

$$X \in E \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0\,,$$

d.h. $(\vec{x} - \vec{p}) \perp \vec{n}$.



Bei der Normalform wird $\vec{n}$ normiert und d nicht-negativ gewählt. Dies lässt sich durch Division der Ebenengleichung durch $|\vec{n}|/\sigma$ mit $\sigma \in \{0, 1\}$ erreichen. Für $O \notin E$ zeigt dann der Normalenvektor $\sigma\vec{n}/|\vec{n}|$ vom Ursprung in Richtung der Ebene und d ist der Abstand der Ebene zum Ursprung.

Beweis

Berechnung des Abstands vom Ursprung für eine Ebene in Hesse-Normalform,

$$E: \vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ) = d \geq 0$$

(i) $O \in E$:

$\implies \quad d = \vec{0} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ) = 0$ und die Richtung von $\vec{n}$ ist irrelevant

(ii) $O \notin E$:

wähle $X \in E$ als nächsten Punkt zum Ursprung

$\implies \quad \vec{x} \parallel \sigma \vec{n}^\circ$ und $\vec{x}$ zeigt von O in Richtung E

$\vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ) > 0 \quad \implies \quad \vec{x}$ und $\sigma \vec{n}^\circ$ haben die gleiche Richtung, d.h. $\vec{x}^\circ = \sigma \vec{n}^\circ$ und der Abstand ist

$$|\vec{x}| = \vec{x} \cdot \vec{x}^\circ = \vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ) = d$$

Beispiel

Hesse-Normalform der Ebene E durch den Punkt $P = (-3, -1, 1)$ mit Normalenvektor $\vec{n} = (2, 1, -2)^{\mathrm{t}}$, Abstand vom Ursprung und Lage von Punkten

(i) Hesse-Normalform:

Einsetzen in die Ebenengleichung $E: \vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} \quad \rightsquigarrow$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 - 2x_3, \quad \vec{p} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -9,$$

d.h.

$$E: 2x_1 + x_2 - 2x_3 = -9$$

Betrag des Normalenvektors (bzw. Koeffizientenvektors) $\vec{n}$:

$|(2, 1, -2)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3 \quad \rightsquigarrow \quad$ Normierung durch Division durch $|\vec{n}| = 3$

rechte Seite negativ $\quad \rightsquigarrow \quad$ Vorzeichenänderung, d.h. $\sigma = -1$

$\rightsquigarrow$ Hesse-Normalform $E: \vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ) = d$ mit

$$\sigma \vec{n}^\circ = \sigma \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \quad d = \sigma \vec{p} \cdot \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (-1)(-9)/3 = 3$$

bzw. (Division der Ebenengleichung durch $|\vec{n}|/\sigma = -3$)

$$E: -(2/3)x_1 - (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = 3$$

(ii) Abstand zum Ursprung:
ablesbar aus der Hesse-Normalform: $d = 3$

am nächsten zum Ursprung gelegener Punkt P

$$\vec{p} = d\,(\sigma \vec{n}^\circ) = 3 \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(iii) Lage von Punkten:

- $X = (-5, 1, 0)$: Einsetzen in die linke Seite $\vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^\circ)$ der Hesse-Normalform $E: -(2/3)x_1 - (1/3)x_2 + (2/3)x_3 = 3 \quad \rightsquigarrow$

$$(-2/3)(-5) + (-1/3)(1) + (2/3)(0) = 3$$

Vergleich mit der rechten Seite $d = 3 \quad \Longrightarrow \quad X \in E$

- $X = (0, -1, 5)$:

$$(-2/3)(0) + (-1/3)(-1) + (2/3)(5) = 11/3$$

$11/3 > d = 3 \quad \Longrightarrow \quad X \notin E$, X liegt auf der anderen Seite von E als der Ursprung

- $X = (5, 0, 1)$:

$$(-2/3)(5) + (-1/3)(0) + (2/3)(1) = -8/3$$

$-8/3 < d = 3 \quad \Longrightarrow \quad X \notin E$, X liegt auf derselben Seite von E wie der Ursprung

Beispiel

Hesse-Normalform der Ebene durch die Punkte $P = (0, 2, 1)$, $Q = (-2, 0, 2)$, $R = (-1, -1, 0)$.

(i) Bestimmung der Ebenengleichung $\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n}$:

- Bestimmung von zwei Vektoren, die die Ebene aufspannen:

$$\vec{u} = \vec{q} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 0-2 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \vec{r} - \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Konstruktion eines Normalenvektors:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)(-1) - (1)(-3) \\ (1)(-1) - (-2)(-1) \\ (-2)(-3) - (-2)(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

- Rechte Seite der Ebenengleichung:

$$\vec{p} \cdot \vec{n} = (0, 2, 1)^{\mathrm{t}} \cdot (5, -3, 4)^{\mathrm{t}} = 0 - 6 + 4 = -2$$

$\rightsquigarrow$ Ebenengleichung $E: \; 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2$

(ii) Skalierung:

- Betrag des Normalenvektors:

$$|\vec{n}| = |(5, -3, 4)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{25 + 9 + 16} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\implies \quad \vec{n}^{\circ} = (5, -3, 4)^{\mathrm{t}} / (5\sqrt{2})$$

- Vorzeichenkorrektur, da rechte Seite negativ $\implies$ $\sigma = -1$

Division der Ebenengleichung durch $|\vec{n}|/\sigma = -5\sqrt{2}$ $\rightsquigarrow$ Hesse-Normalform $E: \; \vec{x} \cdot (\sigma \vec{n}^{\circ}) = \vec{p} \cdot (\sigma \vec{n}^{\circ})$, d.h.

$$E: \; -\frac{5}{5\sqrt{2}} x_1 + \frac{3}{5\sqrt{2}} x_2 - \frac{4}{5\sqrt{2}} x_3 = \frac{2}{5\sqrt{2}}$$

bzw. nach Rationalisieren der Nenner

$$E: \; -\frac{\sqrt{2}}{2} x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{10} x_2 - \frac{2\sqrt{2}}{5} x_3 = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Alternative Methode

Verwendung der Darstellung

$$x_1 \begin{vmatrix} p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_3 & q_3 & r_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

Einsetzen $\quad \rightsquigarrow$

$$x_1 \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Berechnung der Determinanten mit der Sarrus-Regel, z.B.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 0 - 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 = 5$$

$\rightsquigarrow$

$$E:\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2$$

anschließende Skalierung auf Hesse-Normalform wie in (ii)

Beispiel

Parameterdarstellung mit orthonormalen Richtungsvektoren für die Ebene

$$E:\ \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = 6$$

Ebenengleichung ist in Hesse-Normalform, denn der Koeffizientenvektor $\vec{n}$ ist normiert,

$$|\vec{n}| = |(2/3, -2/3, 1/3)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 1/9} = 1$$

und die rechte Seite $d = 6$ (Abstand vom Ursprung) ist nicht-negativ

Konstruktion einer Parameterdarstellung

$$E: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{u} + t\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

- Kanonische Wahl für $\vec{p}$:
  Ortsvektor des Punkts kürzesten Abstands vom Ursprung, d.h.,

$$\vec{p} = d\vec{n} = 6 \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  alternativ (anderer Ortsvektor): zwei Komponenten null setzen und in die Ebenengleichung einsetzen, z.B.

$$p_2 = p_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{2}{3}p_1 = 6, \text{ d.h. } p_1 = 9$$

- Erster Richtungsvektor:
  beliebige Wahl einer zu $\vec{n}$ orthogonalen Richtung $\vec{u}$, z.B. durch 0/1-Vorgabe von zwei Komponenten:

$$u_2 = 1,\ u_3 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad 0 \stackrel{!}{=} \vec{n} \cdot \vec{u} = \frac{2}{3}u_1 - \frac{2}{3} \cdot 1 + 0, \text{ d.h. } u_1 = 1$$

  und nach Normierung

$$\vec{u}^\circ = (1, 1, 0)^\mathrm{t}/\sqrt{2}$$

- Zweiter Richtungsvektor:
  Bilden des Vektorprodukts mit dem Normalenvektor $\rightsquigarrow$ zweite Ebenenrichtung $\vec{v}$, orthogonal zu $\vec{u}^\circ$ und $\vec{n}$:

$$\vec{v}^\circ = \vec{n} \times \vec{u}^\circ = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

  bereits normiert, da $|\vec{n} \times \vec{u}^\circ| = |\vec{n}|\,|\vec{u}^\circ| \sin\sphericalangle(\vec{n}, \vec{u}^\circ) = 1$ wegen der Normierung und Orthogonalität von $\vec{n}$ und $\vec{u}^\circ$

mögliche Parameterdarstellung

$$E: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{2} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Big/ (3\sqrt{2})$$

Beispiel

Schnittpunkt der Gerade $g: \vec{x} = (5,6,3)^{\mathrm{t}} + t(1,4,2)^{\mathrm{t}}$ mit der Ebene

$$E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$$

Einsetzen der Parametrisierung der Gerade,

$$(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} = (5,6,3)^{\mathrm{t}} + t(1,4,2)^{\mathrm{t}} = (5+t, 6+4t, 3+2t)^{\mathrm{t}},$$

in die Ebenengleichung $\rightsquigarrow$

$$(5+t) - 2(6+4t) + 3(3+2t) = 4 \quad \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{Vereinfachung}} \quad 2 - t = 4$$

Einsetzen der Lösung $t = -2$ in die Parametrisierung der Gerade $\rightsquigarrow$
Ortsvektor des Schnittpunkts X

$$\vec{x} = (5,6,3)^{\mathrm{t}} + (-2)(1,4,2)^{\mathrm{t}} = (3,-2,-1)^{\mathrm{t}}$$

Abstand eines Punktes von einer Ebene

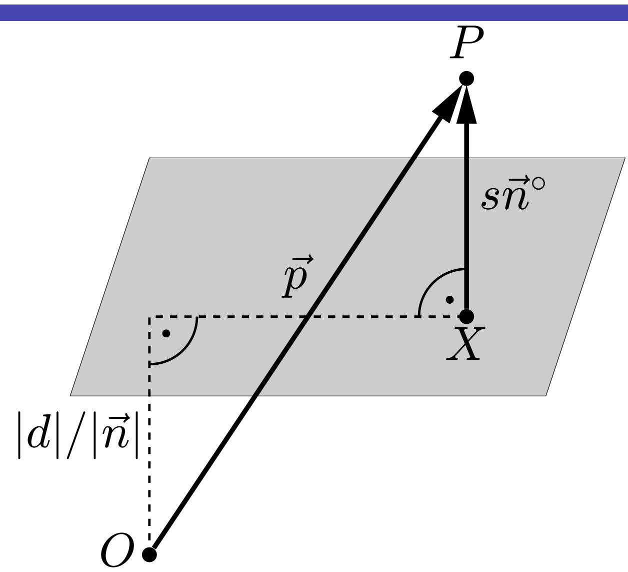
Der Abstand eines Punkts P von einer Ebene

$$E : \vec{x} \cdot \vec{n} = d$$

mit Normalenvektor $\vec{n}$ ist

$$d_P = |\vec{p} \cdot \vec{n} - d| / |\vec{n}| \,.$$

Insbesondere ist $d_O = |d|/|\vec{n}|$ der Abstand der Ebene vom Ursprung O.



Der nächstgelegene Punkt $X \in E$ zu P wird als Projektion von P auf E bezeichnet und hat den Ortsvektor

$$\vec{x} = \vec{p} - s\vec{n}^\circ, \quad s = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|} = \sigma d_P$$

mit $\sigma = \operatorname{sign}(\vec{p} \cdot \vec{n} - d)$ und $\vec{n}^\circ = \vec{n}/|\vec{n}|$ dem normierten Normalenvektor.

Für eine Ebene in Hesse-Normalform ist $d \geq 0$ und $|\vec{n}| = 1$, d.h. $\vec{n} = \vec{n}^\circ$, und die Formeln haben die einfachere Form

$$d_P = |\vec{p} \cdot \vec{n} - d|, \; d_O = d, \quad \vec{x} = \vec{p} - (\vec{p} \cdot \vec{n} - d)\vec{n} \,.$$

Beweis

(i) Projektion X:

$\overrightarrow{XP} \parallel \vec{n} \quad \Longrightarrow$

$$\vec{x} = \vec{p} - s\vec{n^\circ}, \quad \vec{n}^\circ = \vec{n}/|\vec{n}|$$

Ebenengleichung für $X \in E \quad \Longrightarrow$

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \vec{p} \cdot \vec{n} - (s\vec{n}^\circ) \cdot \vec{n} = d$$

$\vec{n}^\circ \cdot \vec{n} = |\vec{n}|$, Auflösen nach $s \quad \rightsquigarrow \quad$ Ausdruck für die Projektion

$$s = \frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|}, \quad \vec{x} = \vec{p} - \frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|}\vec{n}^\circ$$

(ii) Abstand:

$$d_P = \left|\overrightarrow{XP}\right| = |\vec{p} - \vec{x}| = \left|\frac{\vec{p} \cdot \vec{n} - d}{|\vec{n}|}\vec{n}^\circ\right| \underset{|\vec{n}^\circ|=1}{=} \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$$

Beispiel

Abstand des Punkts $P = (2, -4, 5)$ von der Ebene

$$E : x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4$$

und Projektion X von P auf E

(i) Abstand:

$$d_P = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{n} - d|}{|\vec{n}|}$$

Einsetzen von $\vec{p} = (2, -4, 5)$, Normalenvektor ($=$ Koeffizientenvektor der Ebenengleichung) $\vec{n} = (1, -3, 2)^t$, $d = -4$ (rechte Seite der Ebenengleichung) $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} d_P &= \frac{|(2, -4, 5)^t \cdot (1, -3, 2)^t - (-4)|}{|(1, -3, 2)^t|} \\ &= \frac{|(2 + 12 + 10) + 4|}{\sqrt{1 + 9 + 4}} = \frac{28}{\sqrt{14}} = 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

(ii) Projektion:

$$\vec{x} = \vec{p} - \sigma d_P \vec{n}^\circ$$

$\sigma = \operatorname{sign}(\vec{p} \cdot \vec{n} - d) = \operatorname{sign}(28) = 1,\ \vec{n}^\circ = \vec{n}/|\vec{n}| = (1, -3, 2)^{\mathrm{t}}/\sqrt{14} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - (1)(2\sqrt{14}) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \Big/ \sqrt{14} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(iii) Berechnung ohne Anwendung der Formeln:
Einsetzen des Ansatzes

$$\vec{x} = \vec{p} - t\vec{n} = (2, -4, 5)^{\mathrm{t}} - t(1, -3, 2)^{\mathrm{t}}$$

für den Ortsvektor der Projektion in die Ebenengleichung
$E\,:\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4 \quad \rightsquigarrow$

$$(2 - t) - 3(-4 + 3t) + 2(5 - 2t) = -4$$

bzw. nach Umformung

$$24 - 14t = -4$$

mit der Lösung $t = 2$
Einsetzen in den Ansatz $\rightsquigarrow$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

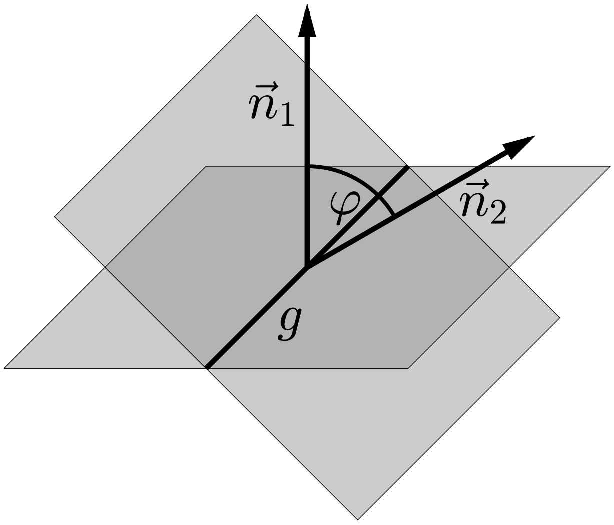
Abstand der Projektion X von P $\rightsquigarrow$

$$d_P = |\overrightarrow{XP}| = |(2, -4, 5)^{\mathrm{t}} - (0, 2, 1)^{\mathrm{t}}| = |(2, -6, 4)^{\mathrm{t}}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Zwei Ebenen

$$E_k : \vec{x} \cdot \vec{n}_k = d_k, \quad k = 1, 2,$$

schneiden sich genau dann in einer Geraden g, wenn die Normalenvektoren $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ nicht parallel sind.



Für den kleineren der beiden Schnittwinkel, $\varphi \in (0, \pi/2]$, gilt

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$

Die Schnittgerade g hat die Richtung

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

Einen Punkt P auf g kann man durch simultanes Einsetzen in beide Ebenengleichungen bestimmen,

$$\vec{p} \cdot \vec{n}_1 = d_1, \quad \vec{p} \cdot \vec{n}_2 = d_2,$$

und mit einer Lösung $(p_1, p_2, p_3)^{\mathrm{t}}$ des resultierenden unterbestimmten linearen Gleichungssystems erhält man die Parameterdarstellung

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beispiel

Schnitt der Ebenen durch die Punkte $Q_1 = (1, 2, 0)$, $Q_2 = (0, 1, 3)$ mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)^t$, $\vec{n}_2 = (0, -1, 1)^t$

Schnittwinkel

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{|1 \cdot 0 + (-1)(-1) + 0 \cdot 1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$\implies \quad \varphi = \pi/3$

Richtung der Schnittgeraden g

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmung eines Punkts P auf g durch Lösung der Ebenengleichungen $E_k : \vec{p} \cdot \vec{n}_k = \vec{q}_k \cdot \vec{n}_k$:
Einsetzen von $\vec{q_1} \cdot \vec{n}_1 = (1, 2, 0)^t \cdot (1, -1, 0)^t = -1$ und $\vec{q_2} \cdot \vec{n}_2 = (0, 1, 3)^t \cdot (0, -1, 1)^t = 2, \quad \rightsquigarrow$

$$E_1 : p_1 - p_2 = -1, \quad E_2 : -p_2 + p_3 = 2$$

unterbestimmtes Gleichungssystem, eine Komponente frei wählbar, z.B.

$$p_2 = 0 \quad \rightsquigarrow \quad p_1 = -1, \; p_3 = 2$$

resultierende Parameterdarstellung der Schnittgeraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Beispiel

Winkel zwischen Flächen eines regelmäßigen Tetraeders mit Eckpunkten $A = (1,0,0)$, $B = (-1,0,0)$, $C = (0,1,\sqrt{2})$, $D = (0,-1,\sqrt{2})$

Kontrolle der Seitenlängen

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-1-1)^2+0+0} = 2,\ |\overline{AC}| = \sqrt{(-1)^2+1^2+(\sqrt{2})^2} = 2,\ \ldots\ \checkmark$$

Winkelberechnung z.B. für die Ebenen durch A, B, C und A, B, D
Normalenvektoren

$$\begin{aligned}
\vec{n}_1 &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2,0,0)^t \times (-1,1,\sqrt{2})^t = (0,2\sqrt{2},-2)^t \\
\vec{n}_2 &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (-2,0,0)^t \times (-1,-1,\sqrt{2})^t = (0,2\sqrt{2},2)^t
\end{aligned}$$

Schnittwinkel

$$\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{4}{\sqrt{12}\sqrt{12}} = \frac{1}{3}$$

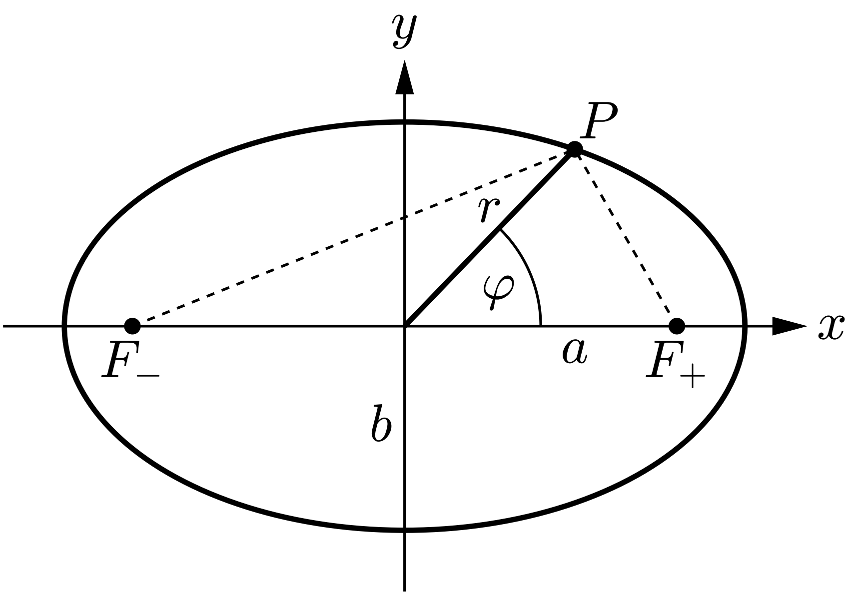
$\rightsquigarrow \quad \varphi \approx 70.53°$

Ellipse

Für die Punkte $P = (x,y)$ auf einer Ellipse ist die Summe der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_\pm$ konstant:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a$$

mit $2a > |\overrightarrow{F_-F_+}|$.



Ist $F_\pm = (\pm f, 0)$, so gilt für die kartesischen Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2\,,$$

und

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P.
Eine Parametrisierung der Ellipse ist

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t$$

mit $t \in [0, 2\pi)$.

Beweis

(i) Äquivalenz der Darstellungen:

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| = 2a \quad \overset{!}{\iff} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - f^2$$

Quadrieren von

$$2a - |\overrightarrow{PF_-}| = \underbrace{2a - \sqrt{(x+f)^2 + y^2}}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = |\overrightarrow{PF_+}|$$

und Vereinfachung $\quad\rightsquigarrow\quad$ äquivalente Form der linken Gleichung

$$\underbrace{4a^2 + 4xf}_{>0} = 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}$$

erneutes Quadrieren und Division durch $(4a)^2 \quad \rightsquigarrow$

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2$$

Substitution von $f^2 = a^2 - b^2$, Division durch $b^2 \quad\rightsquigarrow\quad$ Koordinatenform

(ii) Polarform:

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

Multiplikation mit dem Nenner und Substitution von

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad f^2 = a^2 - b^2, \quad r^2 \cos^2(\varphi) = x^2$$

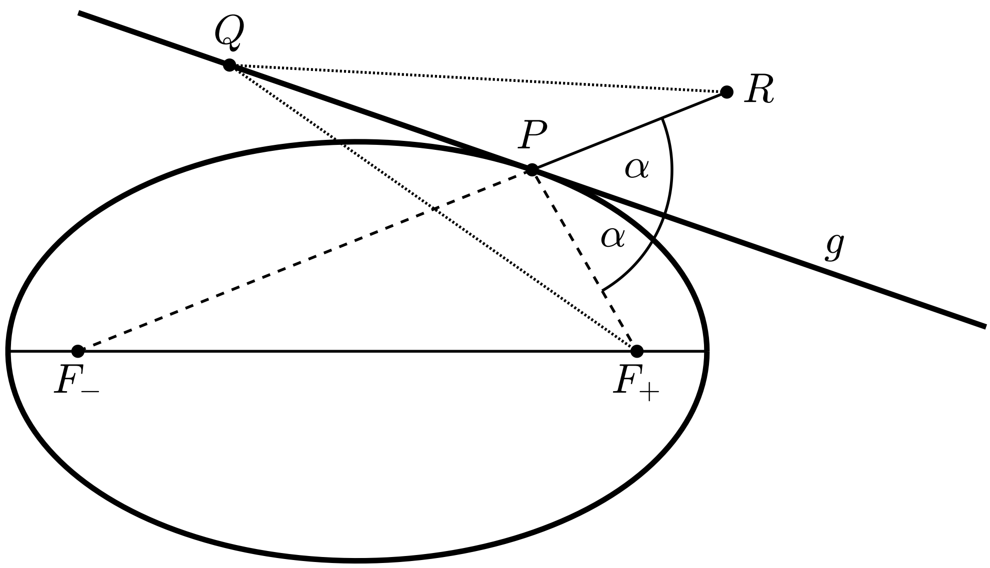
$\rightsquigarrow$

$$x^2 + y^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 = b^2$$

Koordinatenform nach Division durch b^2

Beispiel

Reflektion von Brennpunktstrahlen: Ein von einem Brennpunkt ausgehender Strahl wird von der Ellipse in den anderen Brennpunkt reflektiert; die Strecken $\overline{F_+P}$ und $\overline{PF_-}$ bilden mit der Tangente im Punkt P den gleichen Winkel.



Herleitung der Reflektionseigenschaft:
Hilfspunkt $Q \neq P$ auf der Tangente g außerhalb der Ellipse $\implies$

$$2a = |\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PF_+}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QF_+}|$$

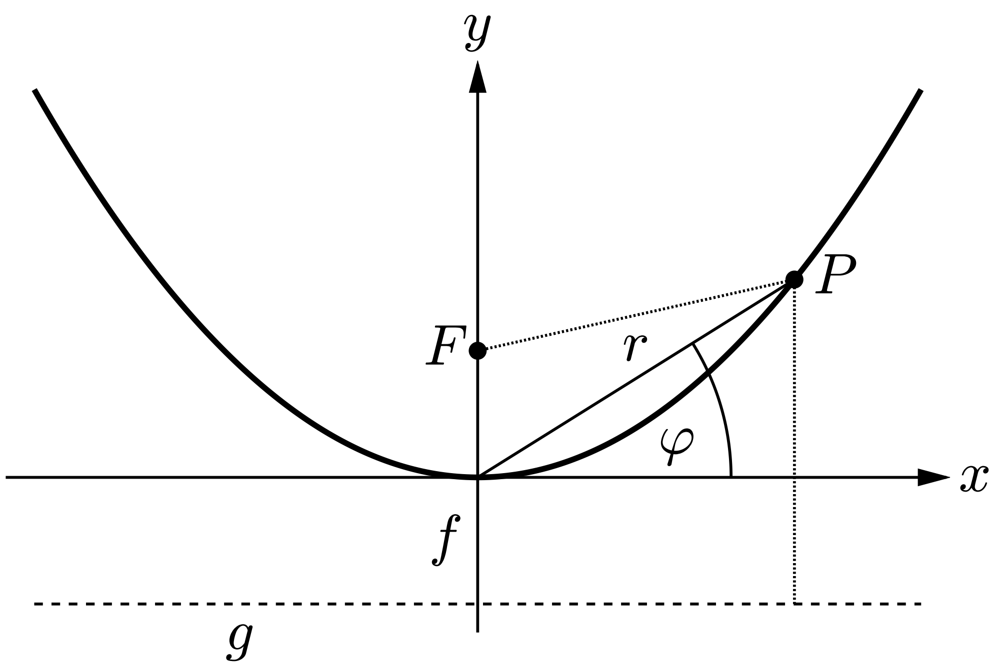
Ersetzen von $\overline{PF_+}$ durch das Spiegelbild $\overline{PR}$ an g $\rightsquigarrow$ $|\overrightarrow{PF_+}| = |\overrightarrow{PR}|$
und $|\overrightarrow{QF_+}| = |\overrightarrow{QR}|$, da ebenfalls $\overline{QR}$ Spiegelbild von $\overline{QF_+}$ ist
Einsetzen in die Ungleichung $\rightsquigarrow$

$$|\overrightarrow{PF_-}| + |\overrightarrow{PR}| < |\overrightarrow{QF_-}| + |\overrightarrow{QR}| \quad \forall Q \in g$$

$\implies$ F_-, P, R kollinear, bzw. $\sphericalangle(F_-PQ) = \alpha$ (gleiche Winkel der Brennpunktstrahlen mit der Tangente)

Parabel

Die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Parabel haben von einem Brennpunkt F und einer Leitgerade g den gleichen Abstand f.



Ist $F = (0, f)$ und $g: \; y = -f$, so gilt für die Koordinaten

$$4f\, y = x^2$$

und

$$r = \frac{4f \sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P.

Beweis

(i) Äquivalenz der Darstellungen:
Gleichsetzen der quadrierten Abstände $\rightsquigarrow$

$$|\overrightarrow{PF}|^2 = x^2 + (y-f)^2 = (y+f)^2 = (\mathrm{dist}(P,g))^2$$

Vereinfachung $\rightsquigarrow$

$$x^2 = 4f\, y$$

(ii) Polarform:
Substitution

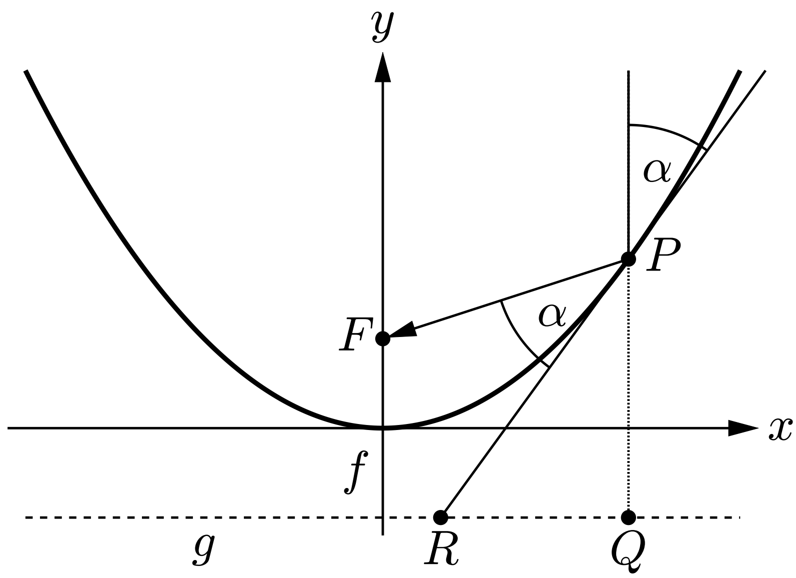
$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$\rightsquigarrow$

$$r^2\cos^2\varphi = 4f\, r\sin\varphi$$

Beispiel

Bündelung senkrecht zur Leitgerade einfallender Strahlen im Brennpunkt



Herleitung der Reflektionseigenschaft, d.h.

$$\alpha = \sphericalangle(F, P, R) \stackrel{!}{=} \sphericalangle(Q, P, R)$$

($\sphericalangle(Q, P, R)$ ist Gegenwinkel zum Winkel des senkrecht einfallenden Strahls mit der Tangente, d.h. Einfallswinkel = Ausfallswinkel)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} &= \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}\right) + \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ -f \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x^2/(2f) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\implies \quad \overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} \parallel (1, x/(2f))^{\mathrm{t}}$, der Richtung der Tangente im Punkt $P = (x, x^2/(4f))$, d.h.

$$\overrightarrow{FP} + \overrightarrow{QP} = s\overrightarrow{RP}$$

Berechnung der Winkel mit Hilfe der Vektorprodukts

$$\sin \sphericalangle(F,P,R) = \frac{|\overrightarrow{FP} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{FP}|\,|\overrightarrow{RP}|}$$

$$\sin \sphericalangle(Q,P,R) = \frac{|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{QP}|\,|\overrightarrow{RP}|} = \frac{|(s\overrightarrow{RP} - \overrightarrow{FP}) \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{QP}|\,|\overrightarrow{RP}|} = \frac{|\overrightarrow{FP} \times \overrightarrow{RP}|}{|\overrightarrow{QP}|\,|\overrightarrow{RP}|}$$

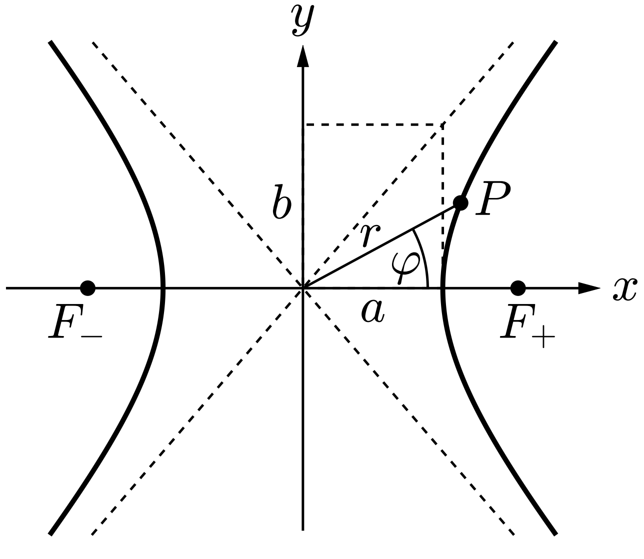
$|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{QP}|$ (definierende Eigenschaft der Parabel) $\Longrightarrow$ Gleichheit der Winkel, die beide kleiner als $\pi/2$ sind

Hyperbel

Für die Punkte $P = (x, y)$ auf einer Hyperbel ist die Differenz der Abstände zu zwei Brennpunkten $F_\pm$ konstant:

$$\left| |\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| \right| = 2a$$

mit $2a < |\overrightarrow{F_- F_+}|$.



Ist $F_\pm = (\pm f, 0)$, so gilt für die Koordinaten

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2\,,$$

und

$$r^2 = -\frac{b^2}{1 - (f/a)^2 \cos^2 \varphi}$$

für die Polarkoordinaten der Punkte P. Die Asymptoten haben die Steigung $\pm b/a$.

Parametrisierungen der Hyperbeläste sind

$$x = \pm a \cosh t, \quad y = b \sinh t$$

mit $t \in \mathbb{R}$.

Beweis

(i) Äquivalenz der Darstellungen:

$$|\overrightarrow{PF_-}| - |\overrightarrow{PF_+}| = \pm 2a \quad \stackrel{!}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = f^2 - a^2$$

Quadrieren von

$$|\overrightarrow{PF_-}| \mp 2a = \underbrace{\sqrt{(x+f)^2 + y^2} \mp 2a}_{>0} = \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = |\overrightarrow{PF_+}|$$

und Vereinfachung $\rightsquigarrow$ äquivalente Identität zur linken Gleichung:

$$4a^2 + 4xf = \pm 4a\sqrt{(x+f)^2 + y^2}$$

erneutes Quadrieren und Division durch $(4a)^2$ $\rightsquigarrow$

$$a^2 + 2xf + \frac{f^2}{a^2}x^2 = x^2 + 2xf + f^2 + y^2$$

Substitution von $f^2 = a^2 + b^2$ und Division durch b^2 $\rightsquigarrow$ Koordinatenform

(ii) Polarform:

$$r^2 = -\frac{b^2}{1-(f/a)^2\cos^2\varphi}$$

Multiplikation mit dem Nenner unter Berücksichtigung von

$$r^2 = x^2+y^2, \quad f^2 = a^2+b^2, \quad x = r\cos\varphi$$

$\rightsquigarrow$

$$x^2+y^2-\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 = -b^2$$

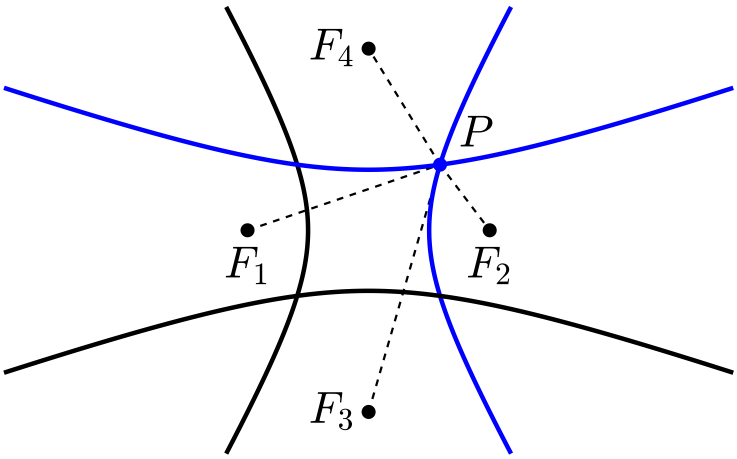
Division durch $-b^2$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ Koordinatenform

Beispiel

Positionsbestimmung durch Zeitdifferenzen $2a_{j,k}$ synchroner Radiosignale von Sendestationen F_i

Position P: Schnittpunkt von Hyperbeln

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| &= 2a_{1,2} \\ |\overrightarrow{PF_3}| - |\overrightarrow{PF_4}| &= 2a_{3,4} \end{aligned}$$



konkrete Daten

$$F_1 = (-2,0),\ F_2 = (2,0), \quad F_3 = (0,-3),\ F_4 = (0,3)$$

sowie $a_{1,2} = a_{3,4} = 1$

$\rightsquigarrow$ Hyperbelgleichungen

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \quad y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$$

($f^2 = a^2 + b^2$ mit $a = 1$ und $f = 2$ bzw. $f = 3$ $\rightsquigarrow$ $b = \sqrt{3}$ bzw. $b = \sqrt{8}$)
Lösen des linearen Gleichungssystems für x^2 und y^2 $\rightsquigarrow$

$$x^2 = \frac{32}{23}, \quad y^2 = \frac{27}{23}$$

Lösung auf dem Schnittpunkt des zu F_2 bzw. F_4 nächsten Hyperbelasts ($a_{1,2} > 0 \implies |\overrightarrow{PF_1}| > |\overrightarrow{PF_2}|$, $a_{3,4} > 0 \implies |\overrightarrow{PF_3}| > |\overrightarrow{PF_4}|$)

$$P = (x, y) = (\sqrt{32/23}, \sqrt{27/23})$$