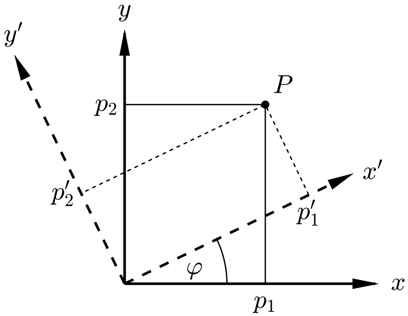
Rotation der Ebenen eines kartesischen Koordinatensystems

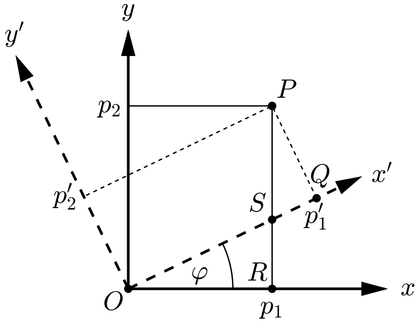
Bei einer Drehung der xy-Ebene um die z-Achse mit dem Winkel φ transformieren sich die Koordinaten eines Punktes $P = (p_1, p_2, p_3)$ gemäß

$$p_1' = \cos\varphi\, p_1 + \sin\varphi\, p_2, \quad p_2' = -\sin\varphi\, p_1 + \cos\varphi\, p_2, \quad p_3' = p_3\,.$$



Analoge Formeln erhält man für Drehungen der yz- und zx-Ebene.

Beweis



$\sphericalangle(O, S, R) = \sphericalangle(P, S, Q) = \pi/2 - \varphi$
$\Longrightarrow$
Kongruenz der Dreiecke $\triangle(O, S, R)$ und $\triangle(P, S, Q)$

erstes Dreieck:

$$|\overline{OS}| = p_1/\cos\varphi, \quad |\overline{RS}| = p_1 \tan\varphi = p_1 \sin\varphi/\cos\varphi$$

zweites Dreieck:

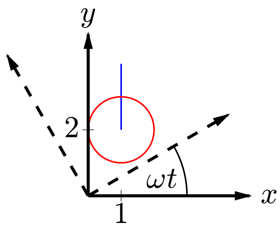
$$\begin{aligned} p_2' &= \cos\varphi\,|\overline{PS}| = \cos\varphi\,(p_2 - |\overline{RS}|) = \cos\varphi\, p_2 - \sin\varphi\, p_1 \\ p_1' &= |\overline{OS}| + |\overline{SQ}| = p_1/\cos\varphi + \sin\varphi\,(p_2 - |\overline{RS}|) \\ &= \frac{1-\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\, p_1 + \sin\varphi\, p_2 = \cos\varphi\, p_1 + \sin\varphi\, p_2 \end{aligned}$$

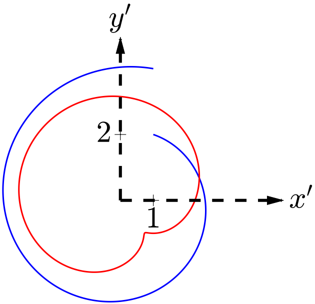
Beispiel

Bahnkurven von geradlinigen und kreisförmigen Bewegungen (links)

$$\begin{aligned} G: &\quad (x, y) = (1,\, 2 + t/\pi), \\ K: &\quad (x, y) = (1 + \cos(t),\, 2 + \sin(t)) \end{aligned}$$

beobachtet in einem mit Winkelgeschwindigkeit $\omega = 1$ rotierenden Bezugssystem (rechts)





Transformation

$$x' = cx + sy, \quad y' = -sx + cy$$

mit $c = \cos(\omega t)$, $s = \sin(\omega t)$
geradlinige Bewegung $\quad\rightsquigarrow\quad$ Spirale:

$$x' = c + s(2 + t/\pi), \quad y' = -s + c(2 + t/\pi)$$

kreisförmige Bewegung:

$$x' = c(1 + \tilde{c}) + s(2 + \tilde{s}), \quad y' = -s(1 + \tilde{c}) + c(2 + \tilde{s})$$

($\tilde{c} = \cos t$, $\tilde{s} = \sin t$)
abrupte Richtungsänderung möglich