

# Vektoranalysis

Das Handout ist Bestandteil der Vortragsfolien zur Höheren Mathematik; siehe die Hinweise auf der Internetseite [vhm.mathematik.uni-stuttgart.de](http://vhm.mathematik.uni-stuttgart.de) für Erläuterungen zur Nutzung und zum Copyright.

# Skalarfeld

Ein Skalarfeld

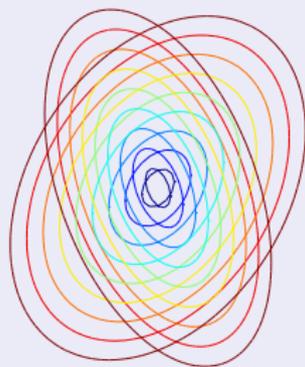
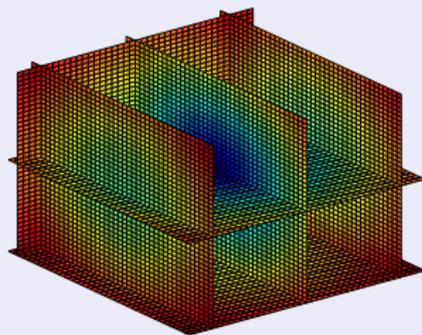
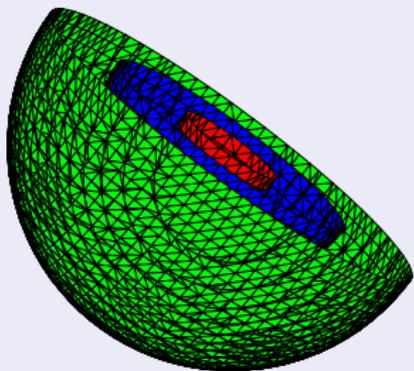
$$P \mapsto U(P)$$

ordnet jedem Punkt  $P$  des Definitionsbereiches  $D$  eine reelle Zahl  $U$  zu.

Alternative Schreibweisen sind

$$U = \Phi(x, y, z), \quad U = U(\vec{r}),$$

wobei  $(x, y, z)$  die Koordinaten und  $\vec{r}$  der Ortsvektor von  $P$  sind.



Zur Visualisierung können die Niveaumengen

$$U(P) = \text{const}$$

oder Einschränkungen auf achsenparallele Ebenen verwendet werden.

# Vektorfeld

Ein Vektorfeld

$$P \mapsto \vec{F}(P)$$

ordnet einem Punkt  $P$  des Definitionsbereichs  $D$  einen Vektor  $\vec{F}$  zu.

Alternative Schreibweisen sind

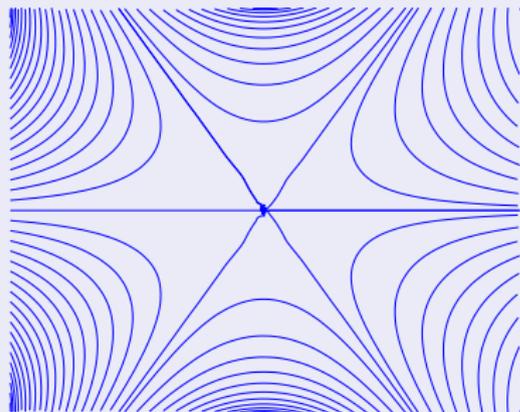
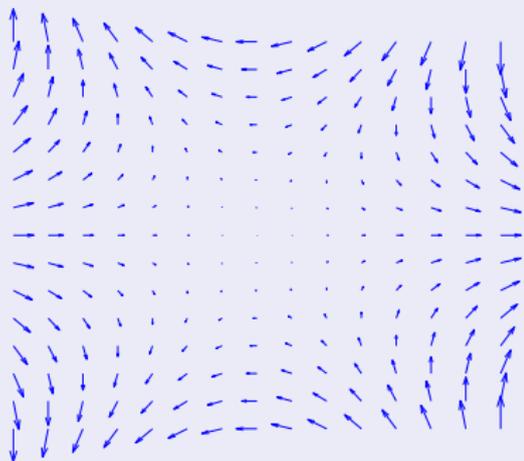
$$\vec{F} = \vec{\Phi}(x, y, z), \quad \vec{F} = \vec{F}(\vec{r}),$$

wobei  $(x, y, z)$  die Koordinaten und  $\vec{r}$  der Ortsvektor von  $P$  sind.

Die Komponenten von  $\vec{F}$  bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems werden mit  $(F_x, F_y, F_z)$  bezeichnet:

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

mit  $\vec{e}_x = (1, 0, 0)^t$ ,  $\vec{e}_y = (0, 1, 0)^t$ , und  $\vec{e}_z = (0, 0, 1)^t$ .



Zur Visualisierung können Richtungsfelder oder Feldlinien verwendet werden.

Bei einem Richtungsfeld werden die Vektoren  $\vec{F}(P)$  mit dem Punkt  $P$  in Form von Pfeilen  $P \rightarrow P + \vec{F}$  assoziiert.

Feldlinien sind Kurven, die in jedem Punkt tangential zu dem Richtungsfeld sind.

## Vektorfelder in Polarkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt  $(x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

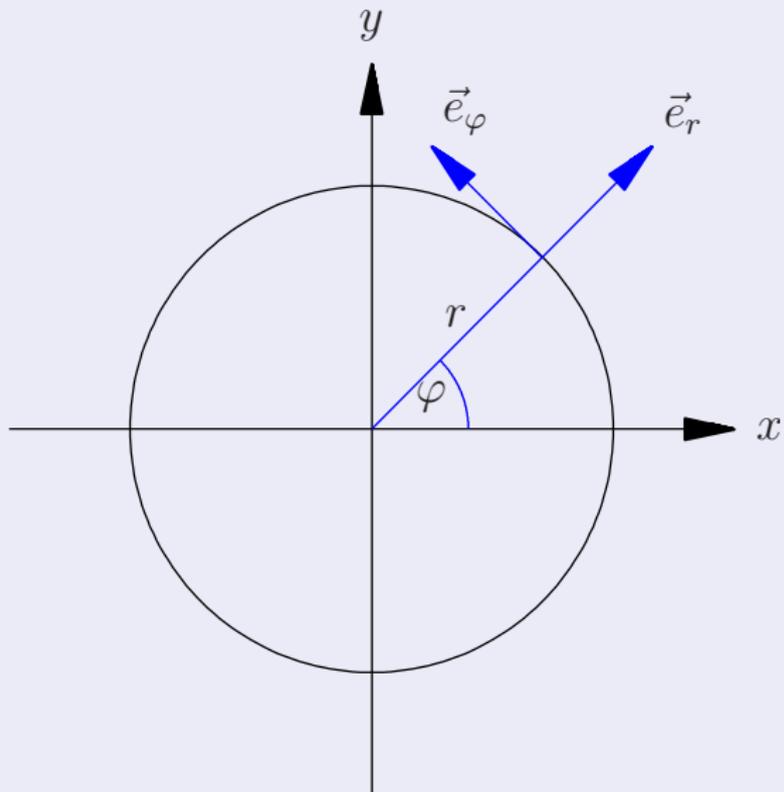
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$



## Beispiel:

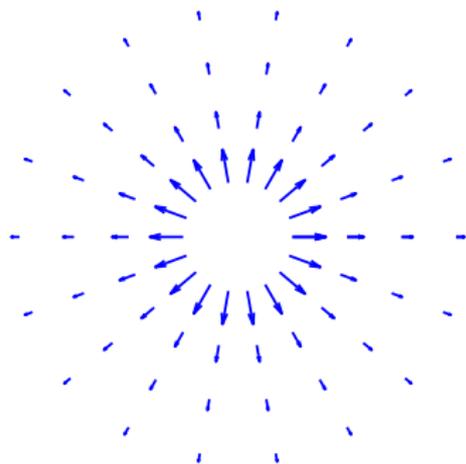
Vektorfeld einer Quelle :

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$$

$f$  beschreibt die Stärke des Feldes im Abstand  $r$  vom Ursprung.

$$f(r) = 1/r \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cos \varphi \\ \frac{1}{r} \sin \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

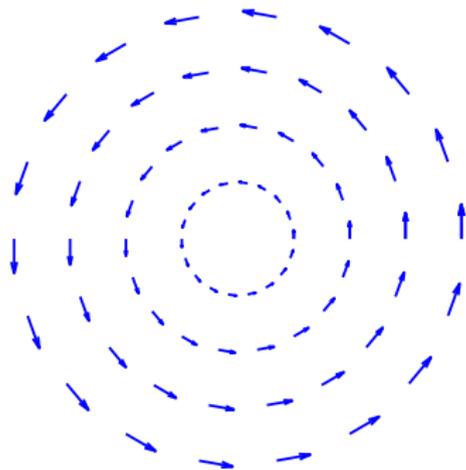


Vektorfeld eines Wirbels:

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_\varphi$$

$$f(r) = r \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\end{aligned}$$



# Vektorfelder in Zylinderkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt  $(x, y, z) = (\varrho \cos \varphi, \varrho \sin \varphi, z)$  bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

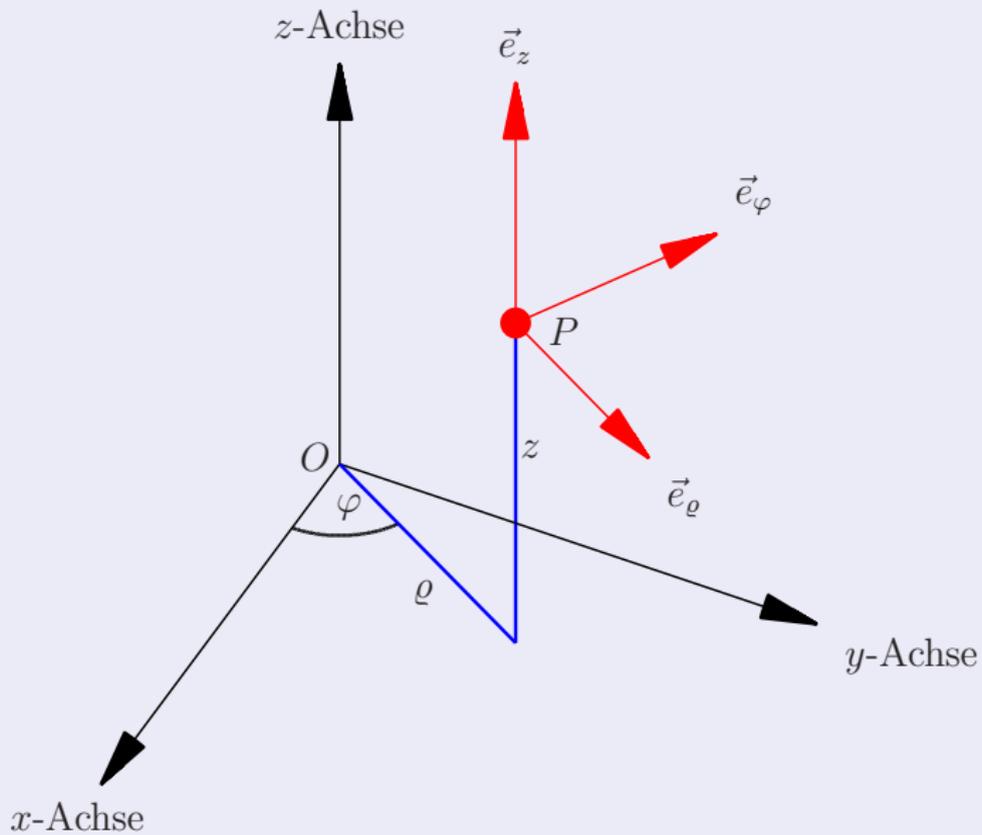
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

mit

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi, \quad F_z = \vec{F} \cdot \vec{e}_z.$$



## Beispiel:

(i) Darstellung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi z \\ \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi z \\ z \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varrho + \varrho z \vec{e}_\varphi + z \vec{e}_z$$

Die Koeffizienten  $F_\varrho = \varrho$ ,  $F_\varphi = \varrho z$ ,  $F_z = z$  sind unmittelbar ablesbar.  
alternativ: Berechnung als Skalarprodukt, z.B.

$$F_\varrho = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi z \\ \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi z \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho$$

(ii) Darstellung des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho \vec{e}_\varrho + \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$$

in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \varrho \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi - \sin \varphi \\ \varrho \sin \varphi + \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$(\cos \varphi = x/r, \sin \varphi = y/r)$$

# Vektorfelder in Kugelkoordinaten

Bezüglich der auf den Punkt  $(x, y, z) = (r \sin \vartheta \cos \varphi, r \sin \vartheta \sin \varphi, r \cos \vartheta)$  bezogenen orthonormalen Basis

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta \sin \varphi \\ -\sin \vartheta \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

besitzt das Vektorfeld

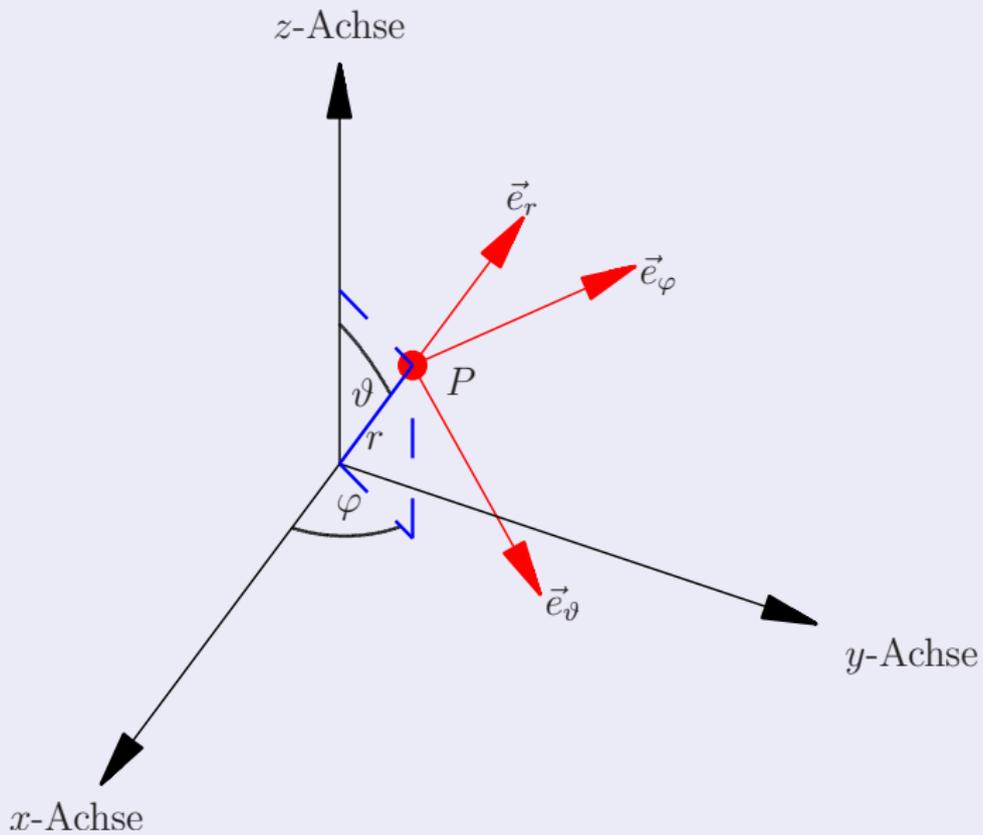
$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

die Darstellung

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

mit

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad F_\vartheta = \vec{F} \cdot \vec{e}_\vartheta, \quad F_\varphi = \vec{F} \cdot \vec{e}_\varphi.$$



## Beispiel:

(i) Vektorfeld in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - yz \\ y + xz \\ z \end{pmatrix}$$

Darstellung in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{F}(r, \vartheta, \varphi) &= \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi - r \sin \vartheta \sin \varphi r \cos \vartheta \\ r \sin \vartheta \sin \varphi + r \sin \vartheta \cos \varphi r \cos \vartheta \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= r \underbrace{\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}}_{\vec{e}_r} + r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} \end{aligned}$$

(ii) Vektorfeld in Kugelkoordinaten:

$$r\vec{e}_\vartheta + \vec{e}_\varphi$$

Darstellung in kartesischen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi - \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi + \cos \varphi \\ -r \sin \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} zx - y \\ zy + x \\ -(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

verwendet:

$$\cos \varphi = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\varrho}, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r}, \quad \sin \vartheta = \frac{\varrho}{r}$$

$$\text{mit } \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

# Gradient

Der Gradient eines Skalarfeldes  $U$  wird durch

$$\text{grad } U = \begin{pmatrix} \partial_x U \\ \partial_y U \\ \partial_z U \end{pmatrix}$$

definiert.

Er ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und gibt die Richtung des stärksten Anstiegs des Skalarfeldes an.

Alternativ lässt sich der Gradient von  $U(P)$  als Grenzwert von Integralen über die Oberfläche  $S$  eines den Punkt  $P$  enthaltenden räumlichen Bereichs  $V$  definieren:

$$\lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S U d\vec{S},$$

wobei das vekorielle Flächenelement  $d\vec{S}$  nach außen orientiert ist.

Dies folgt aus einer Variante des Integralsatzes von Gauß und zeigt insbesondere die Invarianz des Gradienten unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

# Divergenz

Die Divergenz eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

wird durch

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

definiert.

Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Quelldichte des Vektorfeldes.

Alternativ lässt sich die Divergenz eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\vec{F}(P)$  als Grenzwert des Flusses durch die Oberfläche  $S$  eines den Punkt  $P$  enthaltenden räumlichen Bereichs  $V$  definieren:

$$\lim_{\text{diam } V \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } V} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

wobei das vektorielle Flächenelement  $d\vec{S}$  nach außen orientiert ist.

Dies folgt unmittelbar aus dem Satz von Gauß und dem Mittelwertsatz und zeigt insbesondere die Invarianz der Divergenz unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

## Beispiel:

(i) Zentrales Kraftfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z = 1 + 1 + 1 = 3$$

(ii) Wirbelförmige Strömung:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \rho\vec{e}_\varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x(-y) + \partial_y x + \partial_z 0 = 0 + 0 + 0 = 0$$

# Rotation

Die Rotation eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

wird durch

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}$$

definiert.

Sie ist invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen und entspricht physikalisch der Wirbeldichte des Vektorfeldes.

Benutzt man die Indexschreibweise

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^3 F_i \vec{e}_i,$$

so lässt sich die Rotation mit Hilfe des  $\varepsilon$ -Tensors in der Form

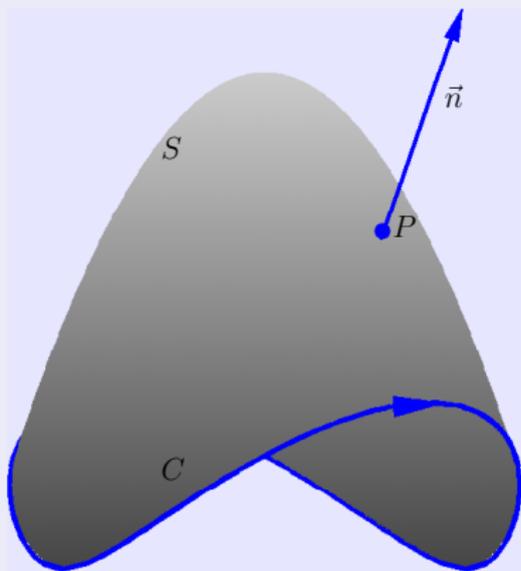
$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_i = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \partial_j F_k$$

schreiben. Diese Definition ist unter anderem bei der Manipulation von Summen vorteilhaft.

Die normale Komponente der Rotation eines stetig differenzierbaren Vektorfeldes  $\vec{F}$  an einem Punkt  $P$  lässt sich als Grenzwert von Arbeitsintegralen definieren:

$$(\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F})(P) = \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Dabei wird der Grenzwert über eine Folge regulärer Flächen  $S$  mit orientiertem Rand  $C : t \mapsto \vec{r}(t)$  gebildet, die alle den Punkt  $P$  enthalten und dort die Normale  $\vec{n}$  haben, wobei der größte Abstand zweier Flächenpunkte ( $\text{diam } S$ ) und damit auch der Flächeninhalt gegen null geht. Das Skalarprodukt auf der linken Seite wird als Wirbelstärke von  $\vec{F}$  um  $\vec{n}(P)$  bezeichnet und ist für  $\vec{n}(P) \parallel \text{rot } \vec{F}$  am größten.



Die geometrische Charakterisierung der Rotation folgt unmittelbar aus dem Satz von Stokes und dem Mittelwertsatz. Sie zeigt insbesondere, dass  $\text{rot } \vec{F}$  invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen ist.

Für ebene Vektorfelder  $\vec{F}$  setzt man

$$\text{rot } \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x.$$

Dies entspricht der Definition für räumliche Vektorfelder, wenn man eine zusätzliche dritte Komponente  $F_z = 0$  einführt und die Rotation in  $\mathbb{R}^3$  wie oben berechnet.

## Beispiel:

(i) Zentrales Kraftfeld:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r\vec{e}_r, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y z - \partial_z y \\ \partial_z x - \partial_x z \\ \partial_x y - \partial_y x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Wirbelförmige Strömung:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho\vec{e}_\varphi, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y 0 - \partial_z x \\ \partial_z(-y) - \partial_x 0 \\ \partial_x x - \partial_y(-y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

## Beispiel:

Illustration der geometrischen Definition für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$S$ : Kreisscheibe in der  $xy$ -Ebene mit Rand  $C$ , d.h.

$$S : x^2 + y^2 \leq a^2, \quad C : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt, \quad \vec{r}'(t) = (-a \sin t, a \cos t, 0)^t \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{\text{diam } S \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } S} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} a^2 dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{2\pi a^2}{\pi a^2} = 2 \end{aligned}$$

in Übereinstimmung mit

$$\vec{n}^\circ \cdot \text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

# Laplace-Operator

Für ein Skalarfeld  $U$  bezeichnet

$$\Delta U = \operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

den Laplace-Operator.

Wie Divergenz und Gradient ist  $\Delta$  invariant unter orthogonalen Koordinatentransformationen.

# Rechenregeln für Differentialoperatoren

Für räumliche Vektorfelder  $\vec{F}$ ,  $\vec{G}$  und räumliche Skalarfelder  $U$ ,  $V$  gelten folgende Rechenregeln.

Bei der Hintereinanderschaltung von Gradient, Divergenz und Rotation gilt

- $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$
- $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$
- $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$

wobei der Laplace-Operator einer vektorwertigen Funktion komponentenweise zu interpretieren ist, d.h.

$$\Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z .$$

Bei der Differentiation von Produkten gilt

- $\text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$
- $\text{div}(U\vec{F}) = U \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \text{grad } U$
- $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$
- $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$

Analoge Identitäten gelten auch für ebene Felder. Formal erhält man die entsprechenden Formeln, wenn man die dritte Komponente der Felder null setzt und nur von  $x$  und  $y$  abhängige Funktionen betrachtet.

## Beweis:

(i)  $\text{rot}(\text{grad } U) = \vec{0}$ :

x-Komponente

$$\partial_y(\text{grad } U)_z - \partial_z(\text{grad } U)_y = \partial_y \partial_z U - \partial_z \partial_y U = 0$$

Analog verschwinden die y- und z-Komponenten.

(ii)  $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$ :

Definition der Rotation mit Hilfe des  $\varepsilon$ -Tensors  $\rightsquigarrow$

$$\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \sum_i \partial_i \sum_{j,k} \varepsilon_{i,j,k} \partial_j F_k = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k} \partial_i \partial_j F_k$$

Vertauschung der Indizes  $i, j \implies$

$$\sum_{i,j,k} \dots = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{j,i,k} \underbrace{\partial_j \partial_i F_k}_{\partial_i \partial_j F_k} = - \sum_{i,j,k} \dots$$

also  $\text{div rot } \vec{F} = 0$

$$(iii) \quad \text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}:$$

x-Komponente

$$\partial_y(\text{rot } \vec{F})_z - \partial_z(\text{rot } \vec{F})_y = (\partial_y \partial_x F_y - \partial_y \partial_y F_x) - (\partial_z \partial_z F_x - \partial_z \partial_x F_z)$$

addiere und subtrahiere den Term  $\partial_x \partial_x F_x$

$\rightsquigarrow$  erste Komponente der behaupteten Formel:

$$\partial_x(\text{div } \vec{F}) - \Delta F_x$$

analoge Behandlung der anderen Komponenten

$$(iv) \quad \text{grad}(UV) = U \text{grad } V + V \text{grad } U$$

Produktregel  $\implies$

$$\partial_k(UV) = (\partial_k U)V + U(\partial_k V)$$

$$(v) \quad \operatorname{div}(U\vec{F}) = U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U:$$

Produktregel  $\implies$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(U\vec{F}) &= \partial_x(UF_x) + \partial_y(UF_y) + \partial_z(UF_z) \\ &= U\partial_x F_x + U\partial_y F_y + U\partial_z F_z + F_x\partial_x U + F_y\partial_y U + F_z\partial_z U \\ &= U \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} U \end{aligned}$$

$$(vi) \quad \operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}:$$

Definition des Kreuzproduktes und Produktregel  $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{i,j,k} ((\partial_i F_j) G_k + [F_j(\partial_i G_k)])$$

Zyklizität von  $\varepsilon$  und Vertauschung von  $i, j$  im zweiten Term [...]  $\rightsquigarrow$

$$\sum_{i,j,k} \varepsilon_{k,i,j} G_k \partial_i F_j + \sum_{i,j,k} \underbrace{\varepsilon_{j,i,k}}_{-\varepsilon_{i,j,k}} F_i \partial_j G_k$$

$\rightsquigarrow$  behauptete Formel

(vii)  $\operatorname{rot}(U\vec{F}) = U \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \times \operatorname{grad} U$ :  
x-Komponente von  $\operatorname{rot}(U\vec{F})$ ,

$$\partial_y(UF_z) - \partial_z(UF_y) = (\partial_y U)F_z - (\partial_z U)F_y + U\partial_y F_z - U\partial_z F_y,$$

entspricht x-Komponente von

$$U \operatorname{rot} \vec{F} + (\operatorname{grad} U) \times \vec{F}$$

zyklische Vertauschung  $\rightsquigarrow$  behauptete Identität

## Beispiel:

illustriere die Identität  $\text{rot}(U\vec{F}) = U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U$  für

$$U = z, \quad \vec{F} = (-y, x, 1)^t$$

(i) Linke Seite:

$$\text{rot}(U\vec{F}) = \text{rot} \begin{pmatrix} -yz \\ xz \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - x \\ -y - 0 \\ z + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2z \end{pmatrix}$$

(ii) Rechte Seite:

$$\begin{aligned} U \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \times \text{grad } U &= z \text{rot} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \text{grad } z \\ &= z \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 + 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Beispiel:

Illustration der Identität  $\text{rot}(\text{rot } \vec{F}) = \text{grad}(\text{div } \vec{F}) - \Delta \vec{F}$  für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix}$$

(i) Linke Seite:

$$\text{rot} \left( \text{rot} \begin{pmatrix} x^2 z \\ y^2 x \\ z^2 y \end{pmatrix} \right) = \text{rot} \begin{pmatrix} z^2 - 0 \\ x^2 - 0 \\ y^2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

(ii) Rechte Seite:

$$\text{grad}(2xz + 2yx + 2zy) - \begin{pmatrix} \Delta x^2 z \\ \Delta y^2 x \\ \Delta z^2 y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z + 2y \\ 2x + 2z \\ 2y + 2x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2z \\ 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ 2x \end{pmatrix}$$

# Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Für Zylinderkoordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad y = \varrho \sin \varphi, \quad z = z$$

gelten für räumliche Skalarfelder

$$U = \Phi(\varrho, \varphi, z)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

die Transformationsregeln

$$\text{grad } U = \partial_\rho \Phi \vec{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi + \partial_z \Phi \vec{e}_z,$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho} \partial_\varphi F_\varphi + \partial_z F_z,$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} = & \left( \frac{1}{\rho} \partial_\varphi F_z - \partial_z F_\varphi \right) \vec{e}_\rho + (\partial_z F_\rho - \partial_\rho F_z) \vec{e}_\varphi \\ & + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho(\rho F_\varphi) - \partial_\varphi F_\rho) \vec{e}_z \end{aligned}$$

sowie

$$\Delta U = \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho \Phi) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 \Phi + \partial_z^2 \Phi.$$

## Beispiel:

(i) Axialsymmetrisches Skalarfeld:

$$U = \Phi(\varrho), \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Gradient und Laplace-Operator

$$\text{grad } U = \varrho \Phi' \vec{e}_\varrho = \Phi' \vec{e}_\varrho, \quad \Delta U = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \partial_\varrho \Phi) = \Phi'' + \varrho^{-1} \Phi'$$

Spezialfall  $U = \varrho^s \rightsquigarrow$

$$\text{grad } U = s \varrho^{s-1} \vec{e}_\varrho = s(x^2 + y^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Delta U = s^2 \varrho^{s-2}$$

(ii) Quellenförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(\varrho)\vec{e}_\varrho$$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \psi) = \psi' + \varrho^{-1} \psi$$

Spezialfall  $\vec{F} = \varrho^s \vec{e}_\varrho \rightsquigarrow$

$$\operatorname{div} \vec{F} = (s + 1) \varrho^{s-1}$$

divergenzfrei für  $s = -1$  bis auf die Singularität im Ursprung

(iii) Wirbelförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(\varrho)\vec{e}_\varphi$$

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \frac{1}{\varrho} \partial_\varrho (\varrho \psi) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi' + \varrho^{-1} \psi \end{pmatrix}$$

Spezialfall  $\vec{F} = \varrho^s \vec{e}_\varphi \rightsquigarrow$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (s+1)\varrho^{s-1} \end{pmatrix}$$

rotationsfrei für  $s = -1$  bis auf die Singularität im Ursprung

# Differentialoperatoren in Kugelkoordinaten

Für Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

gelten für räumliche Skalarfelder

$$U = \Phi(r, \vartheta, \varphi)$$

und Vektorfelder

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

die Transformationsregeln

$$\begin{aligned}
\text{grad } U &= \partial_r \Phi \vec{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\vartheta \Phi \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi \Phi \vec{e}_\varphi, \\
\text{div } \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\varphi F_\varphi + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta F_\vartheta), \\
\text{rot } \vec{F} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\vartheta (\sin \vartheta F_\varphi) - \partial_\varphi F_\vartheta) \vec{e}_r \\
&\quad + \frac{1}{r \sin \vartheta} (\partial_\varphi F_r - \sin \vartheta \partial_r (r F_\varphi)) \vec{e}_\vartheta \\
&\quad + \frac{1}{r} (\partial_r (r F_\vartheta) - \partial_\vartheta F_r) \vec{e}_\varphi
\end{aligned}$$

sowie

$$\Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \partial_\varphi^2 \Phi + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta \partial_\vartheta \Phi).$$

## Beispiel:

(i) Radialsymmetrisches Skalarfeld:

$$U = \Phi(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Gradient und Laplace-Operator

$$\text{grad } U = \partial_r \Phi \vec{e}_r, \quad \Delta U = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Phi) = \Phi'' + \frac{2}{r} \Phi'$$

Spezialfall  $U = r^s \rightsquigarrow$

$$\text{grad } U = s r^{s-1} \vec{e}_r = s(x^2 + y^2 + z^2)^{s/2-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
$$\Delta U = s(s+1)r^{s-2}$$

harmonisch für  $s = -1$  bis auf die Singularität im Ursprung

(ii) Quellenförmiges Vektorfeld:

$$\vec{F} = \psi(r)\vec{e}_r$$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \psi) = \psi' + \frac{2}{r} \psi$$

Spezialfall  $\vec{F} = r^s \vec{e}_r \rightsquigarrow$

$$\operatorname{div} \vec{F} = (s + 2)r^{s-1}$$

divergenzfrei für  $s = -2$  bis auf die Singularität im Ursprung

## Kurvenintegral eines Skalarfeldes

Für eine Kurve  $C$  mit regulärer Parametrisierung

$$[a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld  $U$  wird das Integral

$$\int_C U = \int_a^b U(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt, \quad |\vec{r}'| = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2},$$

als Kurvenintegral von  $U$  über der Kurve  $C$  bezeichnet.

Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung, insbesondere auch von der Orientierung.

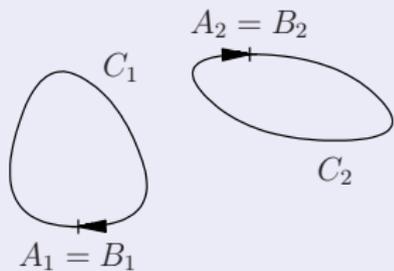
Ein Weg

$$C : [a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

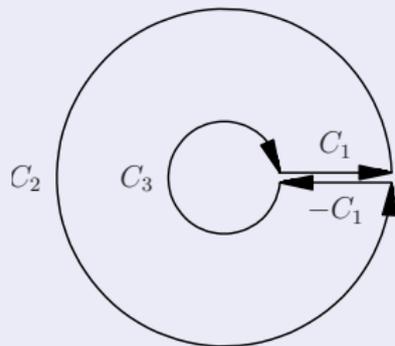
ist eine Kurve mit festgelegtem Durchlaufsinne, der im Allgemeinen durch Pfeile angedeutet wird.

Man sagt, die Kurve verläuft von  $A = (x(a), y(a), z(a))$  nach  $B = (x(b), y(b), z(b))$ .

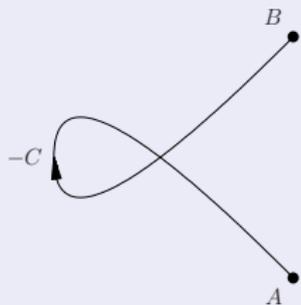
Gilt  $A = B$ , so spricht man von einem geschlossenen Weg.



nicht zusammenhängender  
Weg  $C = C_1 + C_2$



zum Teil mehrfach durchlaufener  
Weg  $C = C_1 + C_2 - C_1 + C_3$



offener Weg  $-C$  mit  
umgekehrter Durchlaufrichtung

Für zusammengesetzte Wege ist die Notation

$$C_1 + \cdots + C_m$$

gebräuchlich.

Dabei können einzelne Wegstücke mehrfach durchlaufen werden ( $\sum C_i \neq \cup C_i$ ), und die Vereinigung der Wege muss nicht zusammenhängend sein.

Schließlich bezeichnet man mit  $-C$  den in entgegengesetzter Richtung durchlaufenen Weg  $C$ .

## Arbeitsintegral eines Vektorfeldes

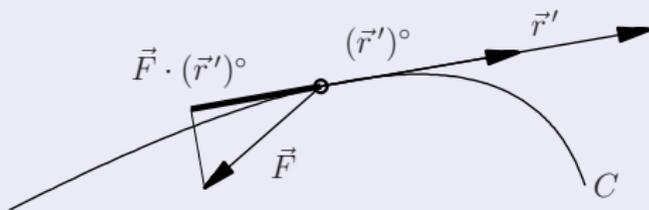
Für einen Weg  $C$  mit regulärer Parametrisierung

$$[a, b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Vektorfeld  $\vec{F}$  wird das Integral

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

als Arbeitsintegral bezeichnet.



Es entspricht dem Kurvenintegral der Projektion  $F_t$  von  $\vec{F}$  in tangentialer Richtung,

$$F_t = \vec{F} \cdot (\vec{r}')^\circ, \quad (\vec{r}')^\circ = \frac{\vec{r}'}{|\vec{r}'|},$$

und ist unabhängig von der Parametrisierung bei gleichbleibender Orientierung des Weges.

Bei Umkehrung der Durchlaufrichtung von  $C$  ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

In Komponentenschreibweise hat das Arbeitsintegral die Form

$$\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

mit  $dx = x'(t) dt$ ,  $dy = y'(t) dt$ ,  $dz = z'(t) dt$  und  $F_x, F_y, F_z$  den Komponenten von  $\vec{F}$ .

## Beispiel:

Beim Durchlaufen des Viertelkreises

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2],$$

im Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

wird die Arbeit

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -2 \cos t \sin t dt = [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

verrichtet.

## Beispiel:

Für ein Geradenstück

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{d}, \quad t \in [a, b]$$

ist

$$\vec{r}'(t) = \vec{d}, \quad d\vec{r} = \vec{d} dt.$$

Definitionsgemäß ist somit für ein Vektorfeld  $\vec{F}$  die verrichtete Arbeit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{p} + t\vec{d}) \cdot \vec{d} dt.$$

Beispielsweise ist für

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b] = [0, 3]$$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^t = (t, 1 + 2t)^t$  und für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

die verrichtete Arbeit

$$\begin{aligned} \int_0^3 \begin{pmatrix} 2t(1+2t) \\ t^2 + 1 + 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt &= \int_0^3 6t^2 + 6t + 2 dt \\ &= [2t^3 + 3t^2 + 2t]_0^3 = 87. \end{aligned}$$

# Flächenintegral eines Skalarfeldes

Für eine Fläche  $S$  mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

und ein Skalarfeld  $U$  wird das Integral

$$\iint_S U \, dS = \iint_D U(\vec{r}(u, v)) |\vec{n}(u, v)| \, du \, dv, \quad \vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r},$$

als Flächenintegral von  $U$  über  $S$  bezeichnet.

Der Wert des Integrals ist unabhängig von der Parametrisierung, insbesondere auch von der Orientierung des Normalenvektors  $\vec{n}$ .

## Beispiel:

Integral eines linearen Skalarfeldes  $U = \vec{p} \cdot \vec{r}$  über ein Dreieck

$$D : (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) + v(\vec{c} - \vec{a})$$

mit  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1 - u$

Normale (konstant)

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}), \quad |\vec{n}| = 2 \text{area} D$$

$\rightsquigarrow$  Flächenintegral

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-u} \underbrace{\vec{p} \cdot (\vec{a} + u(\vec{b} - \vec{a}) + v(\vec{c} - \vec{a}))}_{U(\vec{r}(u,v))} \underbrace{2 \text{area} D}_{d\vec{S}} dv du$$

inneres Integral

$$I_v = \int_0^{1-u} \dots = (1-u)\vec{p} \cdot \vec{a} + (1-u)u\vec{p} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{(1-u)^2}{2}\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

äußeres Integral

$$\int_0^1 I_v = \frac{1}{2}\vec{p} \cdot \vec{a} + \frac{1}{6}\vec{p} \cdot (\vec{b} - \vec{a}) + \frac{1}{6}\vec{p} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

Vereinfachung  $\rightsquigarrow$

$$I = \frac{\text{area}D}{3} \vec{p} \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(Flächeninhalt  $\times$  Wert von  $f$  am Schwerpunkt)

## Beispiel:

Integral des Skalarfeldes  $U = \sqrt{x^2 + y^2} z$  über die Fläche

$$S : D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq \pi$$

(um die z-Achse verdrehter Streifen)

Normale

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\partial_u \vec{r} \perp \partial_v \vec{r} \quad \Rightarrow$$

$$|\vec{n}| = |\partial_u \vec{r}| \cdot |\partial_v \vec{r}| = \sqrt{1 + u^2}$$

$$U(\vec{r}(u, v)) = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \sin^2 v} v = uv$$

↪ Flächenintegral

$$\begin{aligned}\iint_D U|\vec{n}| \, dudv &= \int_0^\pi \int_0^\pi uv\sqrt{1+u^2} \, dv \, du \\ &= \frac{\pi^2}{2} \int_0^\pi u\sqrt{1+u^2} \, du = \frac{\pi^2}{2} \left[ \frac{1}{3} (1+u^2)^{3/2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^2}{6} \left( (1+\pi^2)^{3/2} - 1 \right)\end{aligned}$$

## Flussintegral eines Vektorfeldes

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes  $\vec{F}$  durch eine Fläche  $S$  mit regulärer Parametrisierung

$$D \ni (u, v) \mapsto \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} \in S$$

in Richtung der Normalen

$$\vec{n} = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r}$$

ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dS = \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv.$$

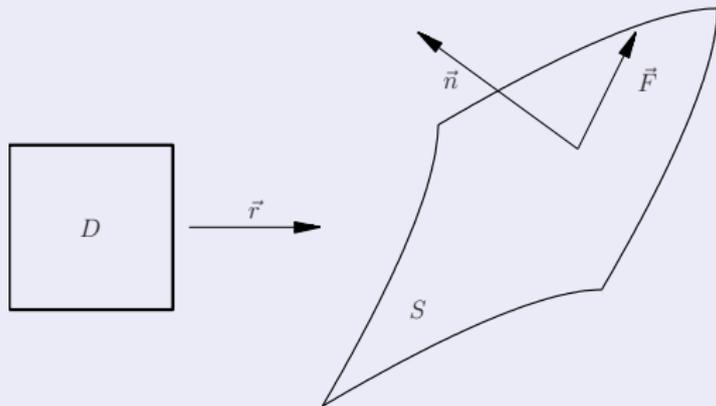
Man bezeichnet dabei

$$d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS, \quad dS = |\vec{n}(u, v)| du dv,$$

als vektorielles Flächenelement.

Bei gleicher Orientierung des Normalenvektors ist das Flussintegral unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Die Umkehrung der Normalenrichtung bewirkt eine Änderung des Vorzeichens.



Die Glattheitsvoraussetzungen an  $\vec{F}$  und  $\vec{r}(u, v)$  können abgeschwächt werden, indem man das Integral über einen geeigneten Grenzprozess definiert.

## Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F} = (x, 1, yz)^t$  durch die Fläche

$$S : \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} u^2 \\ u + v \\ v^2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

partielle Ableitungen

$$\partial_u \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}$$

↪ Normale (z-Komponente positiv gewählt, Fluss nach oben)

$$\vec{n}(u, v) = \partial_u \vec{r}(u, v) \times \partial_v \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix}$$

Fluss von  $\vec{F}$  durch  $S$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{pmatrix} u^2 \\ 1 \\ uv^2 + v^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2v \\ -4uv \\ 2u \end{pmatrix} du dv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 2u^2v - 4uv + 2u^2v^2 + 2uv^3 du dv\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 u^\alpha v^\beta dudv = (\alpha + 1)^{-1}(\beta + 1)^{-1} \rightsquigarrow$$

$$2 \frac{1}{3} \frac{1}{2} - 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} + 2 \frac{1}{3} \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{2} \frac{1}{4} = -\frac{7}{36}$$

## Fluss durch einen Funktionsgraph

Der Fluss eines stetigen Vektorfeldes  $\vec{F}$  nach oben (positive  $z$ -Komponente der Normalen) durch den Graph  $S$  einer differenzierbaren skalaren Funktion  $z = f(x, y)$  über dem Definitionsgebiet  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  ist

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z \, dx dy .$$

## Beweis:

$$S : (u, v) \rightarrow \vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{pmatrix}$$

partielle Ableitungen und Normale mit positiver z-Komponente

$$\partial_u \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_u f \end{pmatrix}, \quad \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_v f \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(u, v) = \partial_u \vec{r} \times \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix}$$

↪ Fluss

$$\begin{aligned} \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \, dudv &= \iint_D \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial_u f \\ -\partial_v f \\ 1 \end{pmatrix} \, dudv \\ &= \iint_D -F_x \partial_u f - F_y \partial_v f + F_z \, dudv \end{aligned}$$

## Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes  $\vec{F} = (x, 1, z)^t$  in  $z$ -Richtung durch den Graph der Funktion  $z = f(x, y) = x^2 - y$  über dem Bereich  $D : |x| + |y| \leq 1$

Symmetrie des Vektorfeldes und Funktionsgraphen zur  $yz$ -Ebene

$\rightsquigarrow$  Integration über den Teilbereich von  $D$  mit  $x \geq 0$  (Faktor 2)

Gesamtfluss

$$\begin{aligned} \iint_D -F_x \partial_x f - F_y \partial_y f + F_z \, dx dy &= 2 \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} -x(2x) + 1 + x^2 - y \, dy \, dx \\ &= 2 \int_0^1 \left[ -x^2 y + y - \frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx = \\ &= 2 \int_0^1 -2x^2(1-x) + 2(1-x) + 0 \, dx = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

## Beispiel:

Fluss eines konstanten Vektorfeldes  $\vec{F} = \vec{p}$  durch einen Teilbereich  $S$  einer Ebene

$$S : z = f(x, y) = ax + by + c, \quad (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$$

in  $z$ -Richtung (von unten nach oben)

Formel für den Fluss durch einen Funktionsgraph  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \iint_D -ap_x - bp_y + p_z \, dx dy \\ &= \text{area}(D) (-ap_x - bp_y + p_z) \end{aligned}$$

$$(\partial_x f = a, \partial_y f = b)$$

# Fluss durch einen Zylindermantel

Der Fluss eines Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z$$

nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Randkurve  $\varrho = \varrho(\varphi)$  ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho \, dz \, d\varphi.$$

Der Fluss des Vektorfeldes durch eine Rotationsfläche, die durch Drehung der Kurve  $\varrho = \varrho(z)$  um die  $z$ -Achse entsteht, ist

$$\int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho \, dz \, d\varphi.$$

Der Fluss durch den Mantel eines Kreiszyinders mit  $\rho = a$  ist demnach

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_{\rho} dz d\varphi,$$

d.h. nur die axialsymmetrische Komponente des Feldes liefert einen Beitrag.

Insbesondere ist beim Kreiszyinder der Fluss für ein axialsymmetrisches Feld  $\vec{F} = f(\rho)\vec{e}_{\rho}$  gleich  $2\pi a(z_{\max} - z_{\min})f(a)$ .

## Beweis:

Darstellung des Vektorfeldes und Parametrisierung der Mantelfläche in Zylinderkoordinaten

$$\vec{F} = F_\varrho \vec{e}_\varrho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z, \quad S : \vec{r}(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

(i)  $\varrho = \varrho(\varphi)$ :

nach außen gerichtete Flächennormale

$$\begin{aligned} \vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \cos \varphi - \varrho \sin \varphi \\ \partial_\varphi \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \partial_\varphi \varrho \sin \varphi + \varrho \cos \varphi \\ -\partial_\varphi \varrho \cos \varphi + \varrho \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = -\partial_\varphi \varrho \vec{e}_\varphi + \varrho \vec{e}_\varrho \end{aligned}$$

Orthogonalität der Basisvektoren  $\vec{e}_\varrho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z \rightsquigarrow \vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho$

(ii)  $\varrho = \varrho(z)$ :

nach außen gerichtete Flächennormale

$$\begin{aligned}\vec{n}(\varphi, z) = \partial_\varphi \vec{r} \times \partial_z \vec{r} &= \begin{pmatrix} -\varrho \sin \varphi \\ \varrho \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_z \varrho \cos \varphi \\ \partial_z \varrho \sin \varphi \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varrho \cos \varphi \\ \varrho \sin \varphi \\ -\varrho \partial_z \varrho \end{pmatrix} = \varrho \vec{e}_\varrho - \varrho \partial_z \varrho \vec{e}_z\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$  Feldkomponente in Normalenrichtung

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = F_\varrho \varrho - F_z \varrho \partial_z \varrho$$

$\varrho$  konstant für einen Kreiszyylinder

$\rightsquigarrow$  Verschwinden der Terme mit Ableitungen von  $\varrho$

## Beispiel:

Fluss des Feldes

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xz^2 \\ yz^2 \\ (x^2 + y^2)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos \varphi \\ \varrho z^2 \sin \varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch den Mantel eines Zylinders mit Abstand  $a$  zur  $z$ -Achse und  $z_{\min} = 0$ ,  $z_{\max} = b$

normale Feldkomponente

$$F_{\varrho} = \vec{F} \cdot \vec{e}_{\varrho} = \begin{pmatrix} \varrho z^2 \cos \varphi \\ \varrho z^2 \sin \varphi \\ \varrho^2 z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \varrho z^2$$

Fluss

$$a \int_0^{2\pi} \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} F_{\varrho}(a, \varphi, z) dz d\varphi = a \int_0^{2\pi} \int_0^b az^2 dz d\varphi = \frac{1}{3} a^2 b^3 \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \pi a^2 b^3$$

## Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varrho \vec{e}_\varrho + z \vec{e}_z$$

nach außen durch einen Zylindermantel, der durch die Kardioide  $\varrho(\varphi) = 1 - \cos \varphi$  im Bereich  $z \in [0, a]$  erzeugt wird

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a F_\varrho \varrho - F_\varphi \partial_\varphi \varrho \, dz \, d\varphi$$

$$F_\varrho = \varrho, F_\varphi = 0 \quad \implies$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \varrho^2(\varphi) \, dz \, d\varphi = a \int_0^{2\pi} (1 - \cos \varphi)^2 \, d\varphi = a \left( 2\pi + 0 + \frac{2\pi}{2} \right) = 3\pi a$$

## Fluss durch eine Sphäre

Der Fluss eines in Kugelkoordinaten dargestellten Vektorfeldes

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\vartheta \vec{e}_\vartheta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$$

von innen nach außen durch eine Sphäre mit Abstand  $r = R$  zum Ursprung ist

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta ,$$

d.h. nur die radiale Komponente des Feldes liefert einen Beitrag. Insbesondere ist der Fluss für ein radiales Feld  $\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$  gleich  $4\pi R^2 f(R)$ .

## Beispiel:

Fluss des Vektorfeldes

$$\vec{F} = (x^2 + y^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = (r \sin \vartheta)^2 \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \vartheta \\ r \sin \varphi \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

von innen nach außen durch die Sphäre  $S$  mit Radius  $R$  und Mittelpunkt im Ursprung

radiale Feldkomponente

$$\begin{aligned} F_r(r, \vartheta, \varphi) &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = (r \sin \vartheta)^2 \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= (r \sin \vartheta)^2 r \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

$r = R \rightsquigarrow$  Fluss von  $\vec{F}$  durch  $S$

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{F} \cdot \dots d\vec{S} &= \iint_S F_r dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r(R, \vartheta, \varphi) \underbrace{R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta}_{dS} \\ &= R^5 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^5 \vartheta}_{(1-\cos^2 \vartheta)^2 \sin \vartheta} d\varphi d\vartheta \\ &= 2\pi R^5 \left[ -\cos \vartheta + \frac{2}{3} \cos^3 \vartheta - \frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi \\ &= 2\pi R^5 \left( 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) = \frac{32}{15} \pi R^5\end{aligned}$$

## Beispiel:

Fluss der senkrechten Strömung  $\vec{F} = (0, 0, z)^t = (0, 0, r \cos \vartheta)^t$  von unten nach oben durch die Halbkugelschale

$$S : r = R, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi/2$$

radiale Feldkomponente

$$F_r(r, \vartheta, \varphi) = \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} = r \cos^2 \vartheta$$

$r = R \rightsquigarrow$  Fluss von  $\vec{F}$  durch  $S$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} F_r(R, \vartheta, \varphi) a^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} R^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$2\pi R^3 \left[ \frac{-\cos^3 \vartheta}{3} \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

## Beispiel:

axialsymmetrisches Feld

$$\vec{F} = F_\varrho(\varrho, z)\vec{e}_\varrho + F_z(\varrho, z)\vec{e}_z, \quad \vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

radiale Feldkomponente

$$F_r = \vec{F} \cdot \vec{e}_r, \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\varrho \cdot \vec{e}_r = \sin \vartheta, \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \cos \vartheta \quad \implies$$

$$F_r = F_\varrho \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta$$

Fluss durch eine Sphäre  $S$  mit Radius  $R$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (F_{\varrho} \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta) R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \int_0^{\pi} (F_{\varrho} \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\vartheta \end{aligned}$$

Spezialfall  $F_{\varrho} = \varrho^{2s}$ ,  $F_z = c$ :  $\varrho = r \sin \vartheta \rightsquigarrow$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_r = F_{\varrho} \sin \vartheta + F_z \cos \vartheta = R^{2s} \sin^{2s+1} \vartheta + c \cos \vartheta$$

$\int_0^{\pi} \cos \vartheta \, d\vartheta = 0 \rightsquigarrow$  Fluss von  $\vec{F}$  durch  $S$

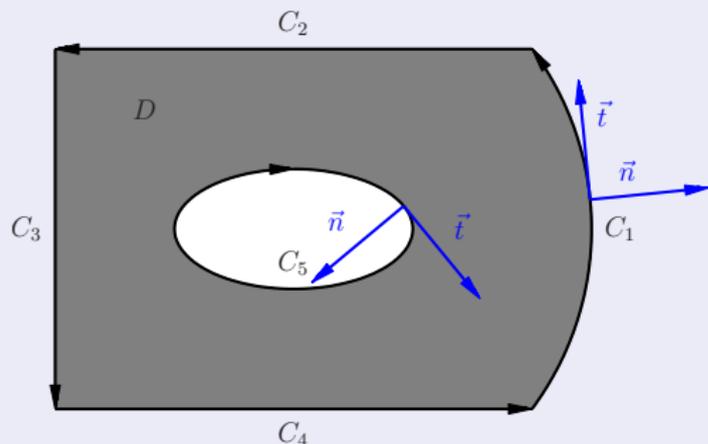
$$\begin{aligned} 2\pi R^2 \int_0^{\pi} R^{2s} \sin^{2s+2} \vartheta \, d\vartheta &= 2\pi R^2 R^{2s} \frac{(2(s+1))!}{2^{2(s+1)}((s+1)!)^2} \pi \\ &= 2\pi^2 \left(\frac{R}{2}\right)^{2(s+1)} \binom{2s+2}{s+1} \end{aligned}$$

## Orientierter Rand einer Fläche

Der orientierte Rand  $C$  eines ebenen Bereichs  $D$  setzt sich aus Wegen  $C_i$  zusammen, deren Durchlaufsinn so gewählt ist, dass  $D$  links von  $C_i$  liegt:

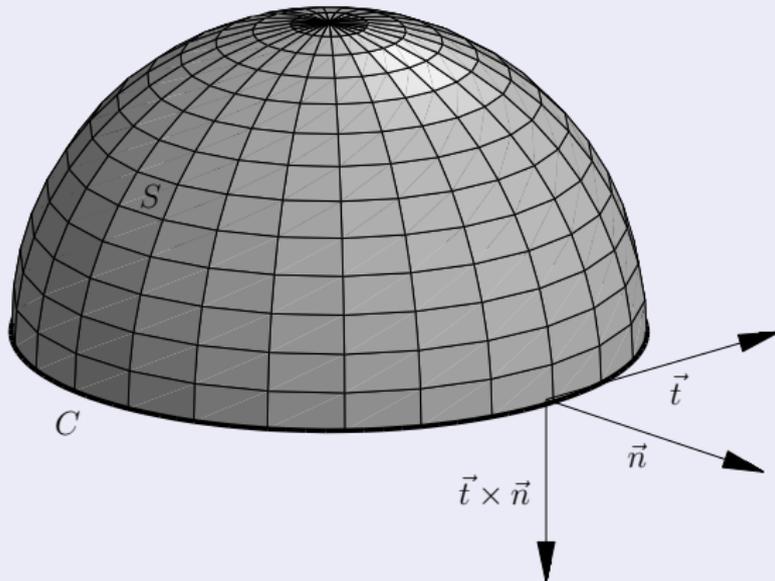
$$C = C_1 + \cdots + C_m.$$

Dies bedeutet, dass die nach außen gerichtete Kurvennormale  $\vec{n}$  und der Tangentenvektor  $\vec{t}$  ein Rechtssystem bilden.



orientierter Rand  
 $S = C_1 + \cdots + C_5$

Entsprechend setzt sich der orientierte Rand  $C$  einer räumlichen Fläche  $S$  mit orientierter Normalen  $\vec{n}$  aus Wegen  $C_i$  zusammen, deren Orientierung so gewählt ist, dass an einem Kurvenpunkt das Kreuzprodukt aus Tangentenvektor  $\vec{t}$  an die Kurve und Normalenvektor  $\vec{n}$  der Fläche von der Fläche weg zeigt.



## Satz von Gauß

Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einem regulären räumlichen Bereich  $V$ , der durch eine Fläche  $S$  mit nach außen orientiertem vektoriellen Flächenelement  $d\vec{S}$  berandet wird, gilt

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an  $\vec{F}$  und  $S$  können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

## Beweis:

Hauptsatz für mehrdimensionale Integrale  $\implies$

$$\iiint_V \partial_\nu F_\nu dV = \iint_S F_\nu n_\nu^\circ dS$$

mit  $F_\nu$  den Komponenten von  $\vec{F}$

Summation über  $\nu = 1, 2, 3$ ,  $d\vec{S} = \vec{n}^\circ dS \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \sum_\nu \partial_\nu F_\nu &= \operatorname{div} \vec{F} \\ \sum_\nu F_\nu n_\nu^\circ dS &= \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ dS = \vec{F} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

d.h. die behauptete Identität

## Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für die Einheitskugel

$V : r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  mit Oberfläche  $S$  und das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ z^3 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung von Kugelkoordinaten

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta$$

Volumen- und vektorielles Flächenelement

$$dV = r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

$$d\vec{S} = \underbrace{\vec{e}_r \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{dS}$$

(Radius  $R = 1$ )

$$(i) \quad I_V = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dV:$$

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x x + \partial_y xy + \partial_z z^3 = 1 + x + 3z^2$$

Darstellung mit Kugelkoordinaten  $\rightsquigarrow$

$$I_V = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r \cos \varphi \sin \vartheta + 3r^2 \cos^2 \vartheta) \underbrace{r^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \, dr}_{dV}$$

Produktform des zweiten und dritten Terms,  $\int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0 \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} I_V &= \operatorname{vol} V + 0 + 2\pi \left( \int_0^1 r^4 \, dr \right) \left( \int_0^\pi 3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi + 2\pi \left[ \frac{1}{5} r^5 \right]_{r=0}^1 \left[ -\cos^3 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^\pi = \frac{4}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

$$(ii) \quad I_S = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}:$$

$$\begin{aligned} F_r &= \vec{F} \cdot \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \cos \varphi \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos^3 \vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \\ &= \cos^2 \varphi \sin^2 \vartheta + \sin^2 \varphi \cos \varphi \sin^3 \vartheta + \cos^4 \vartheta \end{aligned}$$

↪ Flussintegral

$$\begin{aligned} I_S &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_r \underbrace{\sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta}_{dS} \\ &= \pi \int_0^\pi \sin \vartheta (1 - \cos^2 \vartheta) \, d\vartheta + 0 + 2\pi \int_0^\pi \cos^4 \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= \pi \left( [-\cos \vartheta]_0^\pi + \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \vartheta \right]_0^\pi \right) + 2\pi \left[ -\frac{1}{5} \cos^5 \vartheta \right]_0^\pi \\ &= 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{4}{5}\pi = \frac{32}{15}\pi \end{aligned}$$

## Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das radiale Feld  $\vec{F} = r^s \vec{e}_r$  und die Kugel  $V : r < R$  mit Oberfläche  $S : r = R$

Formel für die Divergenz in Kugelkoordinaten  $\implies$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 r^s) = (s+2)r^{s-1}$$

$dV = 4\pi r^2 dr \implies$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} dV = 4\pi \int_0^R (s+2)r^{s+1} dr = 4\pi R^{s+2} \quad (s > -2)$$

$d\vec{S} = \vec{e}_r dS \implies$

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S R^s dS = \operatorname{area}(S) R^s = (4\pi R^2) R^s$$

## Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß

Für einen regulären räumlichen Bereich  $V$ , der durch eine Fläche  $S$  mit nach außen gerichteter Normale berandet wird, gilt aufgrund des Satzes von Gauß

$$3 \operatorname{vol} V = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S}.$$

Insbesondere erhält man für ein lineares Feld  $\vec{F} = A\vec{r}$  wegen  $\operatorname{div} \vec{F} = \operatorname{Spur} A$

$$\operatorname{Spur} A \operatorname{vol} V = \iint_S (A\vec{r}) \cdot d\vec{S}.$$

## Beispiel

Polyeder  $V$  mit Inkugel (berührt jede Fläche), Radius  $r_i$

Hesse-Normalform  $\rightsquigarrow$

$$\vec{r} \cdot d\vec{S} = \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{n}^\circ}_{=\text{const}} dS = r_i dS$$

Volumenberechnung mit dem Satz von Gauß  $\rightsquigarrow$

$$3 \text{ vol}(V) = \iint_S \vec{r} \cdot d\vec{S} = \iint_S r_i dS = r_i \text{ area}(S)$$

- Hexaeder mit Kantenlänge  $a$ :

Oberfläche  $6a^2$ , Inkugelradius  $\frac{a}{2}$ , Volumen  $a^3 = (6a^2 \cdot a/2)/3$

- Tetraeder mit Kantenlänge  $a$ :

Oberfläche  $4 \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^2 \sqrt{3}$ , Volumen  $\frac{\sqrt{2}a^3}{12} \rightsquigarrow$  Inkugelradius  $\frac{\sqrt{6}a}{12}$

- Kugel (Grenzfall):

Volumen  $\frac{4\pi r^3}{3}$ , Oberfläche  $4\pi r^2 \rightsquigarrow$  korrektes Verhältnis  $r : 3$

## Satz von Gauß in der Ebene

Für einen regulären ebenen Bereich  $A$  mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$$

(Rand liegt links) gilt für ein stetig differenzierbares bivariates Vektorfeld  $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} \, dA = \int_C \vec{F} \cdot \vec{n}^\circ \, dC = \int_C \vec{F} \times d\vec{r},$$

wobei

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x F_x + \partial_y F_y, \quad \vec{F} \times d\vec{r} = (F_x y'(t) - F_y x'(t)) \, dt.$$

## Beispiel:

Illustration des Satzes von Gauß für das ebene Vektorfeld

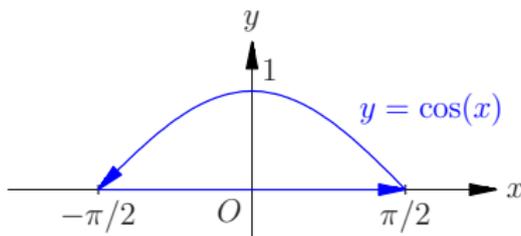
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ xy + y \end{pmatrix}$$

über dem Bereich  $A$ , berandet von der Kurve  $C$ , die aus den zwei Kurvenstücken

$$\vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

$$\vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

besteht



(i) Linke Seite im Satz von Gauß:

$$\iint_A \operatorname{div} \vec{F} dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos x} 1 + (x+1) dy dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+x) \cos x dx = 4$$

(ii) Rechte Seite:

$\vec{F} \parallel d\vec{r} = (1, 0)^t dt$  auf  $C_1 \implies \vec{F} \times d\vec{r} = 0$  und folglich Integration nur über  $C_2$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \times d\vec{r} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{(-t - \cos^2 t)}_{F_x} \underbrace{(-\sin t)}_{y'} - \underbrace{(-t \cos t + \cos t)}_{F_y} \underbrace{(-1)}_{x'} dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} t \sin t + \cos t dt = [2 \sin t - t \cos t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 \end{aligned}$$

(Integrale von ungeraden Funktionen über  $[-\pi/2, \pi/2]$  sind null.)

# Flächenberechnung mit dem Satz von Gauß

Der Inhalt einer ebenen Fläche  $A$  mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand  $C : t \mapsto \vec{r}(t)$  lässt sich durch

$$\text{area}(A) = \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r}$$

berechnen.

Anstatt von  $\vec{r}$  kann auch ein anderes Vektorfeld  $\vec{F}$  mit konstanter Divergenz verwendet werden; der Faktor  $1/2$  ist dann durch den  $1/\text{div } \vec{F}$  zu ersetzen.

## Beispiel:

Flächeninhalt des Gebiets  $A$ , das von einer Ellipse  $C$  mit Halbachsenlängen  $a, b > 0$  berandet wird

Parametrisierung der Randkurve:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \text{area } A &= \frac{1}{2} \int_C \vec{r} \times d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t \\ b \sin t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a \sin t dt \\ b \cos t dt \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} 1 dt = \pi ab \end{aligned}$$

## Satz von Green

Für ein stetig differenzierbares bivariates Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einem regulären ebenen Bereich  $A$  mit entgegen dem Uhrzeigersinn orientierten Rand  $C : t \mapsto \vec{r}(t)$  gilt

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \, dA = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

wobei  $\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x F_y - \partial_y F_x$ .

Diese auf Green zurückgehende Identität ist ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

Die Glattheitsvoraussetzungen können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

## Beweis:

Hauptsatz für zweidimensionale Integrale:

$$\iint_A \partial_x g = \int_C g \bar{n}_x^0, \quad \iint_A \partial_y h = \int_C h \bar{n}_y^0$$

mit  $(\bar{n}_x^0, \bar{n}_y^0)$  der nach außen gerichteten Einheitsnormalen von  $A$   
setze  $g = F_y$ ,  $h = -F_x$  und berücksichtige

$$\vec{n}(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix}, \quad \bar{n}^0 = \vec{n}/|\vec{n}|, \quad dC = |\vec{n}(t)| dt$$

↪

$$\iint_A \partial_x g - \partial_y h = \int_C \left( F_y \frac{y'}{|\vec{n}|} + F_x \frac{x'}{|\vec{n}|} \right) |\vec{n}| dt = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

## Beispiel:

Illustration des Satzes von Green für das Vektorfeld

$$\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

und die Einheitskreisscheibe

$$A : x_1^2 + x_2^2 \leq 1$$

mit dem Rand

$$C : t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

- Flächenintegral:

$$\iint_A (\partial_x F_y - \partial_y F_x) dA = \iint_A c - b dA = \pi(c - b)$$

- Arbeitsintegral:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t + b \sin t \\ c \cos t + d \sin t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{r}'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -a \cos t \sin t - b \sin^2 t + c \cos^2 t + d \sin t \cos t dt \\ &= \pi(c - b), \end{aligned}$$

da  $\int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0$  und  $\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 0$

## Beispiel:

singuläres Vektorfeld

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

auf der Kreisscheibe

$$A: x^2 + y^2 \leq R, \quad R > 0$$

Rotation

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= \partial_x F_y - \partial_y F_x \\ &= \frac{x^2 + y^2 - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \end{aligned}$$

## Parametrisierung des Randes $C$ der Kreisscheibe

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

## Arbeitsintegral

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_C F_x x' + F_y y' \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-R \sin t}{R^2} (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2} R \cos t dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

kein Widerspruch zum Satz von Green wegen der Singularität von  $\vec{F}$  bei  $(0, 0)$

## Satz von Stokes

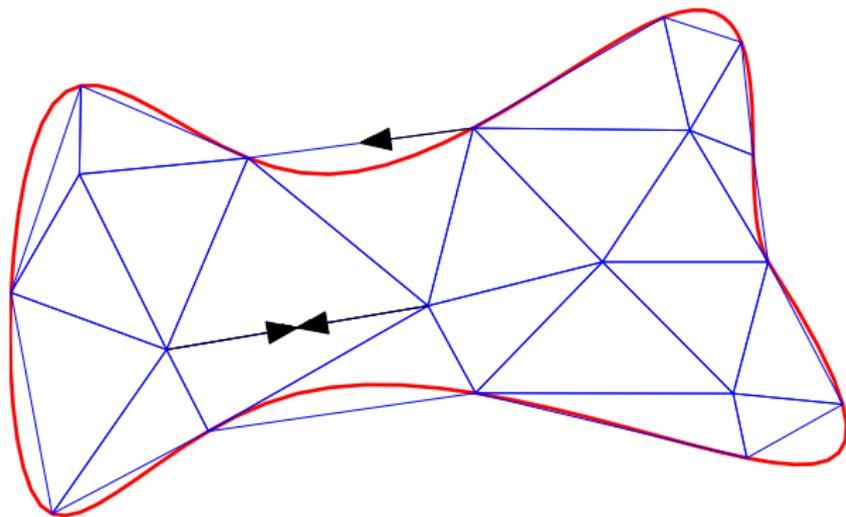
Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einer regulären Fläche  $S$  mit orientiertem Rand  $C$  gilt

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Die Glattheitsvoraussetzungen an  $\vec{F}$  und  $S$  können abgeschwächt werden, indem man die Integrale über geeignete Grenzprozesse definiert.

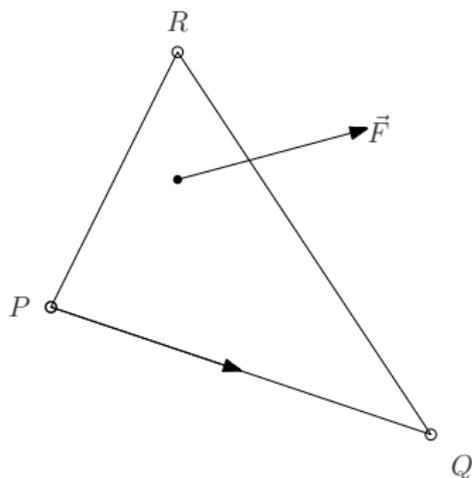
## Beweisskizze:

Approximation von  $\vec{F}$  durch ein stückweise lineares Vektorfeld auf einer Triangulierung von  $S$



Aufhebung der Arbeitsintegrale im Inneren

$\rightsquigarrow$  nur ein Dreieck zu betrachten



$\vec{F} = A\vec{x} + \vec{b}$ , bestimmt durch Werte an den Eckpunkten  $P, Q, R$

Zerlegung von  $A$  in einen symmetrischen und antisymmetrischen Anteil

$$A = D + E, \quad d_{j,k} = \frac{1}{2}(a_{j,k} + a_{k,j}), \quad e_{j,k} = \frac{1}{2}(a_{j,k} - a_{k,j})$$

Der symmetrische Anteil  $\vec{G} = D\vec{x} + \vec{b}$  besitzt ein Potential:

$$U = \frac{1}{2}\vec{x} \cdot (D\vec{x}) + \vec{b} \cdot \vec{x}, \quad \text{grad } U = \vec{G}$$

$\rightsquigarrow$  Für den symmetrischen Anteil sind beide Seiten im Satz von Stokes null.

↪ betrachte nur ein antisymmetrisches Feld

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 0 & -h_3 & h_2 \\ h_3 & 0 & -h_1 \\ -h_2 & h_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{h} \times \vec{x}$$

(i) Linke Seite  $\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$ :

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} \begin{pmatrix} -h_3x_2 + h_2x_3 \\ -h_1x_3 + h_3x_1 \\ -h_2x_1 + h_1x_2 \end{pmatrix} = 2\vec{h}$$

Normale:  $(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p}) / |(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p})|$ ,

area  $S = \frac{1}{2}|(\vec{q} - \vec{p}) \times (\vec{r} - \vec{p})| \implies$

$$\iint_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \vec{h} \cdot (\vec{q} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{p} + \vec{p} \times \vec{q})$$

(ii) Rechte Seite  $\int_C \vec{H} \cdot d\vec{r}$ :

betrachte Teilrand  $C_r : \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}), 0 \leq t \leq 1$

$\rightsquigarrow$  Arbeitsintegral

$$\int_0^1 \vec{h} \times (\vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) dt = (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{q}$$

(Der zweite Term verschwindet, da  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$ .)

analoge Betrachtung für die Wege  $C_p$  und  $C_q$   $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{H} \cdot d\vec{r} &= (\vec{h} \times \vec{p}) \cdot \vec{q} + (\vec{h} \times \vec{q}) \cdot \vec{r} + (\vec{h} \times \vec{r}) \cdot \vec{p} \\ &= (\vec{p} \times \vec{q}) \cdot \vec{h} + (\vec{q} \times \vec{r}) \cdot \vec{h} + (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{h} \end{aligned}$$

aufgrund der zyklischen Invarianz des Spatproduktes

$\rightsquigarrow$  Übereinstimmung mit dem Ergebnis aus (i)

## Beispiel:

Illustration des Satzes von Stokes für das Vektorfeld

$$\vec{F} = (z, x, y)^t$$

und die Halbkugelschale

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

- Rotation von  $\vec{F}$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y y - \partial_z x \\ \partial_z z - \partial_x y \\ \partial_x x - \partial_y z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- vektorielles Flächenelement in Kugelkoordinaten

$$d\vec{S} = \vec{e}_r dS = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^t \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

- Randkurve:

$$C : t \mapsto \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)^t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Linke Seite im Satz von Stokes:

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \sin \vartheta + \sin \varphi \sin \vartheta + \cos \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi d\vartheta \\ &= 0 + 0 + 2\pi \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \right]_{\vartheta=0}^{\pi/2} = \pi\end{aligned}$$

Rechte Seite:

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}'(t)} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \pi\end{aligned}$$

gleiches Resultat für die Kreisscheibe

$$A: \vec{s}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

wegen des unveränderten Randes:

$$\iint_A \operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r d\varphi dr = \pi$$

(Polarkoordinaten:  $dA = r d\varphi dr$ )

## Beispiel:

Fluss der Rotation des Vektorfeldes

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ -xz \\ z \end{pmatrix}$$

nach außen durch den Zylindermantel

$$S: \quad x^2 + y^2 = 1, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

Berechnung mit Hilfe des Satzes von Stokes als Arbeitsintegral über die Randkurven

$$C_u: \vec{r}_u(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_o: \vec{r}_o(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) \\ \sin(-t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

( $t \in [0, 2\pi]$ , entgegengesetzte Orientierung beachten)

Flussberechnung als Arbeitsintegral:

$$\int_{C_u} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_o} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

mit

$$\int_{C_u} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 0$$

und

$$\int_{C_o} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sin(-t) \\ -\cos(-t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}'_o(t)} dt = 2\pi$$

$$(\sin^2 t + \cos^2 t = 1)$$

$\implies$  Fluss durch den Mantel gleich  $2\pi$

alternative direkte Berechnung:

Gesamtfluss durch die Zylinderoberfläche null wegen  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0$

$\implies$  Fluss durch den Mantel entspricht der negativen Summe der Flüsse durch Boden und Deckel

$\vec{n} \parallel \vec{e}_z \implies$  nur z-Komponente der Rotation relevant

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)_z = \partial_x(-xz) - \partial_y(yz) = -2z$$

Fluss durch den Boden ( $z = 0$ ) null

Fluss durch den Deckel  $A$  ( $z = 1$ ):

$$\iint_A (-2) dA = -2 \operatorname{area} A = -2\pi$$

$\implies$  Fluss durch den Mantel gleich  $2\pi$

## Beispiel:

wirbelförmige Strömung um die z-Achse

$$\vec{F} = \underbrace{f(\varrho)}_{F_\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Formel für die Rotation in Zylinderkoordinaten  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{F} &= (-\partial_z F_\varphi) \vec{e}_\varrho + 0 \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varrho} (\partial_\varrho (\varrho F_\varphi)) \vec{e}_z \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f' + \varrho^{-1} f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) Fluss von  $\text{rot } \vec{F}$  durch die Kreisscheibe  $A: x^2 + y^2 \leq R^2$  nach oben:  
Satz von Stokes  $\rightsquigarrow$  Arbeitsintegral über die Randkurve

$$C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

d.h.

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} &= \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} f(R) \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{e}_\varphi} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}}_{d\vec{r}} dt = 2\pi R f(R) \end{aligned}$$

(ii) Fluss von  $\text{rot } \vec{F}$  durch das Rechteck  $S = [-a, a] \times [-b, b]$  nach oben  
im Spezialfall  $f(\varrho) = \varrho$ :

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dS = 8ab$$

# Potential

Gilt

$$\vec{F} = \text{grad } U,$$

so bezeichnet man  $U$  als Potential des Vektorfeldes  $\vec{F}$ .

Für ein solches Gradientenfeld ist das Arbeitsintegral wegunabhängig und kann als Potentialdifferenz berechnet werden. Für jeden Weg

$$C : t \mapsto \vec{r}(t), \quad t \in [a, b],$$

von  $P : \vec{p} = \vec{r}(a)$  nach  $Q : \vec{q} = \vec{r}(b)$  gilt

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P),$$

wobei in Anlehnung an die Schreibweise einer Stammfunktion für  $U(Q) - U(P)$  auch  $[U]_P^Q$  geschrieben wird.

Insbesondere ist  $\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  für geschlossene Wege  $C$ .

## Beweis:

setze  $\psi(t) = U(\vec{r}(t))$

Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung  $\implies$

$$U(Q) - U(P) = \psi(b) - \psi(a) = \int_a^b \frac{d}{dt} \psi(t) dt$$

Kettenregel  $\implies$

$$\frac{d}{dt} \psi(t) = \text{grad } U \cdot \vec{r}'(t)$$

und wegen  $\text{grad } U = \vec{F}$

$$\int_a^b \frac{d}{dt} \psi(t) dt = \int_a^b \vec{F} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

## Beispiel:

Vektorfeld und Potential

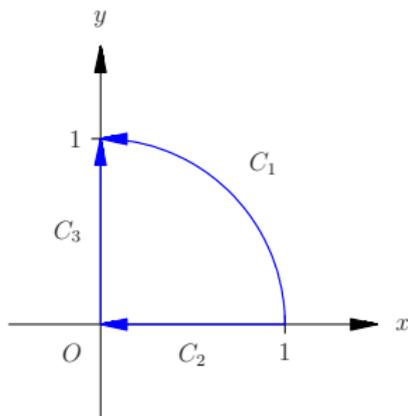
$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \text{grad } U(x, y), \quad U = (x^2 - y^2)/2$$

Wege

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2],$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$

$$C_3 : \vec{r}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1],$$



(i) Arbeitsintegral von  $(1, 0)$  nach  $(0, 1)$  entlang  $C_1$ :

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int_0^{\pi/2} -2 \sin t \cos t dt \\ &= [\cos^2 t]_0^{\pi/2} = -1\end{aligned}$$

(ii) Arbeitsintegral entlang von  $C_2 + C_3$ :

$$\begin{aligned}\int_{C_2+C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} dt + \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 -1 dt = -1\end{aligned}$$

(iii) Verichtete Arbeit als Potentialdifferenz:

$$U(x, y) = (x^2 - y^2)/2 \implies$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(0, 1) - U(1, 0) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

für beliebige Wege  $C$  von  $(1, 0)$  nach  $(0, 1)$

$\rightsquigarrow$  Grund für die Übereinstimmung der Arbeitsintegrale entlang von  $C_1$  und  $C_2 + C_3$

## Beispiel:

Potential eines radialsymmetrischen Vektorfeldes

$$\vec{F} = \varphi(r)\vec{e}_r \quad \Longrightarrow \quad U = \Phi(r), \quad \Phi' = \varphi$$

Überprüfung mit der Kettenregel

$$\begin{aligned}\partial_x \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) &= \underbrace{\Phi'}_{\varphi}(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)(2x) \\ &= \varphi(r) x/r\end{aligned}$$

analog:  $\partial_y \Phi = \varphi y/r$ ,  $\partial_z \Phi = \varphi z/r$

$\rightsquigarrow$

$$\text{grad } U = \varphi(r) \underbrace{(x, y, z)^t/r}_{\vec{e}_r} = \vec{F}$$

## Anwendung auf das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = \underbrace{-\gamma M m r^{-2}}_{\varphi} \vec{e}_r$$

Bilden der Stammfunktion von  $\varphi \rightsquigarrow$  Potential

$$U = \gamma M m r^{-1}$$

aufgewendete Arbeit (gegen das Kraftfeld), um von einem Punkt  $P$  aus das Gravitationsfeld zu verlassen

$$- \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \left( \lim_{|\vec{q}| \rightarrow \infty} \gamma M m / |\vec{q}| - \gamma M m / |\vec{p}| \right) = \gamma M m / |\vec{p}|$$

Gleichsetzen der potentiellen und kinetischen Energie  $\rightsquigarrow$   
Startgeschwindigkeit bei einem antriebslosen Flug

$$\gamma M m / |\vec{p}| = (m/2)v^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\gamma M}{|\vec{p}|}}$$

Gravitationskonstante:  $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$

Erdmasse:  $M = 6.0 \cdot 10^{24} \text{kg}$

Erdradius:  $|\vec{p}| = R = 6.4 \cdot 10^6 \text{m}$

$\rightsquigarrow$  Fluchtgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.7 \cdot 6.0}{6.4} \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 11.2 \text{ km/s}$$

## Beispiel:

Ein Elektron bewegt sich in einer Spulenwindung der Höhe  $h$ , d.h. entlang des Weges

$$C : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, ht/(2\pi))^t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

im elektrischen Feld  $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$ ,  $r = |\vec{r}|$ , das von einer Punktladung im Ursprung induziert wird.

Potential

$$U = -\frac{1}{r}, \quad \text{grad } U = \vec{F}$$

(Formel für den Gradienten in Kugelkoordinaten:  $\text{grad } f(r) = f'(r) \vec{e}_r$ )

Berechnung der Arbeit als Potentialdifferenz an den Endpunkten

$$\vec{r}(0) = (1, 0, 0)^t, \quad \vec{r}(2\pi) = (1, 0, h)^t$$

der Kurve  $C$ :

$$U(1, 0, h) - U(1, 0, 0) = -\frac{1}{\sqrt{1+h^2}} + 1$$

Berechnung der verrichteten Arbeit auf direktem Weg:

$$\vec{e}_r = (x, y, z)^t / r, \quad d\vec{r} = \vec{r}'(t) dt \quad \rightsquigarrow$$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ ht/(2\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ h/(2\pi) \end{pmatrix}}{(\cos^2 t + \sin^2 t + h^2 t^2 / (4\pi^2))^{3/2}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{h^2 t / (4\pi^2)}{(1 + h^2 t^2 / (4\pi^2))^{3/2}} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{\sqrt{1 + h^2 t^2 / (4\pi^2)}} \right]_0^{2\pi} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2}} \end{aligned}$$

## Existenz eines Potentials

Für ein stetiges Vektorfeld  $\vec{F}$  auf einem zusammenhängenden Gebiet  $D$  existiert ein Potential  $U$  genau dann, wenn das Arbeitsintegral wegunabhängig ist.

In diesem Fall ist

$$U(P) = U(P_0) + \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \vec{F} = \text{grad } U,$$

wobei  $C_P : t \mapsto \vec{r}(t)$  ein beliebiger in  $D$  verlaufender Weg ist, der einen fest gewählten Punkt  $P_0 \in D$  mit  $P$  verbindet.

Insbesondere ist  $U$  bis auf eine Konstante (den Wert  $U(P_0)$ ) eindeutig bestimmt.

Ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  stetig differenzierbar auf  $D$ , so ist

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$$

notwendig für die Existenz eines Potentials.

Für ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $D$  ist die Wirbelfreiheit ebenfalls hinreichend.

## Beweis:

(i) Wegunabhängigkeit notwendig:

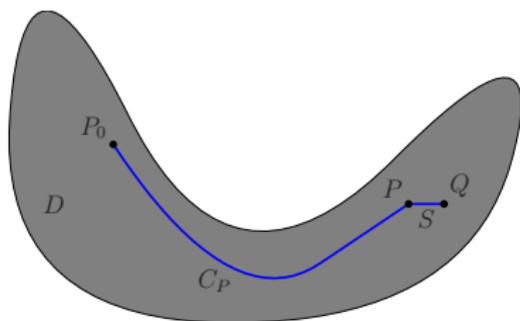
$$\vec{F} = \text{grad } U \quad \implies$$

$$\int_C \text{grad } U \cdot d\vec{r} = U(Q) - U(P)$$

für jeden Weg  $C : P \rightarrow Q$

(ii) Wegunabhängigkeit hinreichend:

setze  $U(P) = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$  mit  $C : P_0 \rightarrow P$



zeige:  $\vec{F} = \text{grad } U$

$$\vec{q} = \vec{p} + h\vec{e}_i, S : P \rightarrow Q \quad \implies$$

$$U(Q) - U(P) = \int_{C+S} \vec{F} d\vec{r} - \int_C \vec{F} d\vec{r} = \int_S \vec{F} d\vec{r}$$

aufgrund der Wegunabhängigkeit

Parametrisierung

$$S : \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{e}_i, \quad t \in [0, h]$$

$\rightsquigarrow$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^h \vec{F}(\vec{p} + t\vec{e}_i) \cdot \vec{e}_i dt = \int_0^h F_i(\vec{p} + t\vec{e}_i) dt$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung  $\implies$

$$\int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i)$$

für ein  $\tau \in [0, h]$

$i$ -te Komponente des Gradienten:

$$\partial_i U(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(\vec{p} + h\vec{e}_i) - U(\vec{p})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hF_i(\vec{p} + \tau\vec{e}_i)}{h} = F_i(\vec{p})$$

(iii) Wirbelfreiheit notwendig:

$$\vec{F} = \text{grad } U \quad \implies$$

$$\partial_i F_j - \partial_j F_i = \partial_i \partial_j U - \partial_j \partial_i U = 0$$

(alle Komponenten von  $\text{rot } \vec{F}$  null)

(iv) Wirbelfreiheit hinreichend:

$D$  einfach zusammenhängend  $\implies$

jede geschlossene Kurve  $C$  berandet eine Fläche  $S$  in  $D$

Satz von Stokes  $\implies$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\implies$  Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals

## Beispiel:

Bestimmung eines Potentials  $U$  des Vektorfeldes

$$\vec{F} = (\sin y, x \cos y)^t$$

$U$  existiert, da

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \partial_x(x \cos y) - \partial_y \sin y = 0$$

und  $\vec{F}$  global definiert ist ( $\mathbb{R}^2$  ist einfach zusammenhängend)

kanonischer Weg  $C_P : O \rightarrow P$ :

$$\vec{r}(t) = (p_1 t, p_2 t)^t, \quad t \in [0, 1]$$

$\rightsquigarrow$  Potential  $U$  ( $\vec{F} = \operatorname{grad} U$ ) mit  $U(O) = 0$

$$\begin{aligned} U(P) &= \int_{C_P} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \begin{pmatrix} \sin(p_2 t) \\ (p_1 t) \cos(p_2 t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 p_1 \sin(p_2 t) + p_1 p_2 t \cos(p_2 t) dt = [p_1 t \sin(p_2 t)]_0^1 = p_1 \sin p_2 \end{aligned}$$

## Beispiel:

lineares Feld

$$\vec{F} = A\vec{r}, \quad A = (a_{j,k})$$

Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{pmatrix} a_{3,2} - a_{2,3} \\ a_{1,3} - a_{3,1} \\ a_{2,1} - a_{1,2} \end{pmatrix}$$

Existenz eines Potentials  $U \Leftrightarrow$  Symmetrie von  $A$

$A = A^t \implies \vec{F} = \text{grad } U$  mit

$$U = \frac{1}{2} \vec{r}^t A \vec{r}$$

## Beispiel:

Differenziert man das Skalarfeld

$$U = \arctan(y/x) = \varphi, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

mit der Kettenregel ( $d \arctan t/dt = 1/(1+t^2)$ ), so erhält man das Vektorfeld

$$\vec{F} = \text{grad } U = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ x \\ \frac{y}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = r^{-1} \vec{e}_\varphi.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist für  $(x, y) \neq (0, 0)$  erfüllt:

$$\partial_y F_x - \partial_x F_y = \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Dennoch ist das Arbeitsintegral entlang eines Kreises  $C : x^2 + y^2 = R^2$  nicht null:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \underbrace{R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}}_{d\vec{r}} dt = 2\pi$$

$\implies$   $\nexists$  global definiertes Potential

kein Widerspruch zu  $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ , da das Definitionsgebiet von  $\vec{F}$  nicht einfach zusammenhängend ist

keine stetige (konsistente) Definition von  $U = \varphi$  auf einem Kreisring um den Ursprung möglich

Ein Potential existiert (nämlich  $U = \varphi$ ) auf jeder einfach zusammenhängenden Menge, die den Ursprung nicht enthält.

## Konstruktion eines Potentials

Ein Potential  $U$  für ein Vektorfeld  $\vec{F}$  ( $\vec{F} = \text{grad } U$ ) kann durch sukzessive Integration konstruiert werden.

Bilden einer Stammfunktion bezüglich der ersten Variablen liefert

$$U(x, y, z) = \int F_x dx = U_1(x, y, z) + C_1(y, z).$$

Nun folgt aus  $F_y = \partial_y U = \partial_y U_1 + \partial_y C_1$

$$C_1(y, z) = \int (F_y - \partial_y U_1) dy = U_2(y, z) + C_2(z)$$

und schließlich aus  $F_z = \partial_z U = \partial_z U_1 + \partial_z U_2 + \partial_z C_2$

$$C_2(z) = \int (F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2) dz = U_3(z) + c.$$

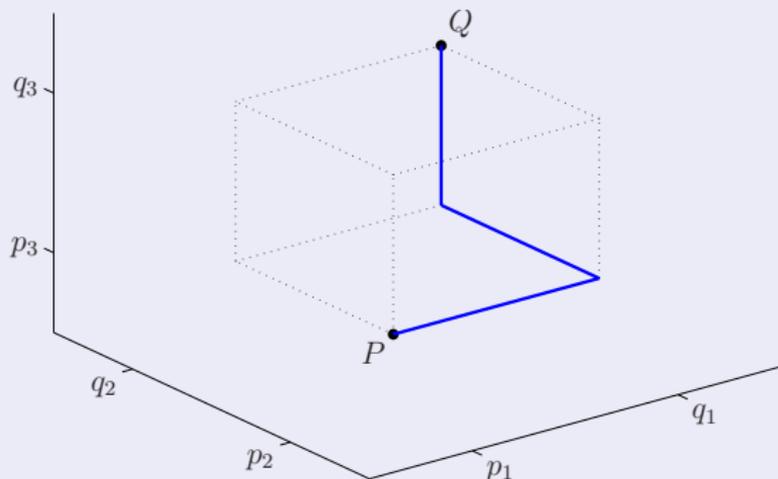
Insgesamt ergibt sich

$$U = U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c.$$

Das Potential  $U$  kann auch mit Hilfe des Arbeitsintegrals bestimmt werden. Aufgrund der Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals kann ein Weg von  $P$  nach  $Q$  gewählt werden, der parallel zu den Koordinatenachsen verläuft. Wählt man den Weg, der zunächst parallel zur  $x$ -, dann parallel zur  $y$ - und zuletzt parallel zur  $z$ -Achse verläuft, ergibt sich für das Potential das Hakenintegral

$$U(Q) = U(P) + \int_{p_1}^{q_1} F_x(x, p_2, p_3) dx + \int_{p_2}^{q_2} F_y(q_1, y, p_3) dy + \int_{p_3}^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz.$$

Meist ist es dabei günstig, für den festen Punkt  $P$  den Ursprung zu wählen.



Durch Permutation der Koordinaten ergeben sich noch fünf weitere mögliche Hakenintegrale. Man wählt daraus dasjenige aus, bei dem die Integranden möglichst einfach werden.

## Beweis:

Integrabilitätsbedingung  $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0} \implies$

$$\partial_x [F_y - \partial_y U_1] = \partial_x F_y - \partial_y \partial_x U_1 = \partial_x F_y - \partial_y F_x = 0,$$

d.h. [...] ist nicht von  $x$  abhängig und die Definition von  $U_2$  ist gerechtfertigt

Analog ist  $[F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2]$  weder von  $x$  noch von  $y$  abhängig.

$$\partial_x [F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2] = \partial_x F_z - \partial_z \partial_x U_1 - \partial_z \partial_x U_2 = \partial_x F_z - \partial_z F_x - 0 = 0$$

und

$$\partial_y [F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2] = \partial_y F_z - \partial_z \partial_y U_1 - \partial_z (F_y - \partial_y U_1) = 0$$

$\rightsquigarrow$  Rechtfertigung der Definition von  $U_3$

## Beispiel:

Konstruktion eines Potentials  $U$  für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

prüfe die Integrabilitätsbedingung

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{pmatrix} \partial_y(2 + 3x - xy) & - & \partial_z(-2y - xz) \\ \partial_z(2x + 3z - yz) & - & \partial_x(2 + 3x - xy) \\ \partial_x(-2y - xz) & - & \partial_y(2x + 3z - yz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Integration von  $F_x$  nach  $x \rightsquigarrow$

$$\int F_x dx = \int 2x + 3z - yz dx = \underbrace{x^2 + 3xz - xyz}_{U_1(x,y,z)} + C_1(y, z)$$

Integration nach  $y$   $\rightsquigarrow$

$$\int F_y - \partial_y U_1 dy = \int -2y - xz + xz dy = \underbrace{-y^2}_{U_2(y,z)} + C_2(z)$$

Integration nach  $z$   $\rightsquigarrow$

$$\int F_z - \partial_z U_1 - \partial_z U_2 dz = \int 2 + 3x - xy - 3x + xy dz = \underbrace{2z}_{U_3(z)} + c$$

Zusammenfassen der Terme  $\rightsquigarrow$  Potential

$$\begin{aligned} U &= U_1(x, y, z) + U_2(y, z) + U_3(z) + c \\ &= x^2 + 3xz - xyz - y^2 + 2z + c \end{aligned}$$

mit  $c \in \mathbb{R}$

## Beispiel:

parameterabhängiges Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + \alpha x^2 y \\ x^3 + 4y^3 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Integrabilitätsbedingung  $\implies$

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 3x^2 - \alpha x^2 = 0,$$

d.h.  $\alpha = 3$

Bestimmung des Potentials durch sukzessive Integration:

$$\partial_x U = F_x = 2x + 3x^2 y \implies U = x^2 + x^3 y + C_1(y)$$

und

$$\partial_y U = F_y \implies x^3 + C_1'(y) = x^3 + 4y^3, \quad C_1(y) = y^4 + c$$

$\rightsquigarrow$  Potential für  $\vec{F}$  mit  $\alpha = 3$

$$U = x^2 + x^3 y + y^4 + c$$

## Beispiel:

Konstruktion eines Potentials  $U$  für das wirbelfreie Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2x + 3z - yz \\ -2y - xz \\ 2 + 3x - xy \end{pmatrix}$$

Potentialwert  $U(O) = 0$  im Ursprung  $O = (0, 0, 0)^t \rightsquigarrow$  Hakenintegral

$$\begin{aligned} U(Q) &= U(O) + \int_0^{q_1} F_x(x, 0, 0) dx + \int_0^{q_2} F_y(q_1, y, 0) dy + \int_0^{q_3} F_z(q_1, q_2, z) dz \\ &= \int_0^{q_1} 2x dx + \int_0^{q_2} -2y dy + \int_0^{q_3} 2 + 3q_1 - q_1 q_2 dz \\ &= q_1^2 - q_2^2 + 2q_3 + 3q_1 q_3 - q_1 q_2 q_3 \end{aligned}$$

# Vektorpotential

Ist das Vektorfeld  $\vec{F}$  als Rotation eines Vektorfeldes  $\vec{A}$  darstellbar,

$$\vec{F} = \text{rot } \vec{A},$$

so wird  $\vec{A}$  als Vektorpotential von  $\vec{F}$  bezeichnet.

## Beispiel:

Aus der Identität

$$\operatorname{rot}(U\vec{G}) = U \operatorname{rot} \vec{G} + (\operatorname{grad} U) \times \vec{G}$$

erhält man für

$$U = \vec{a} \cdot \vec{r}, \quad \vec{G} = \vec{r}$$

wegen  $\operatorname{rot} \vec{r} = \vec{0}$

$$\operatorname{rot}((\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}) = \vec{a} \times \vec{r}.$$

↪ Vektorpotential

$$\vec{A} = (\vec{a} \cdot \vec{r}) \vec{r}$$

für  $\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r}$

## Existenz eines Vektorpotentials

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $D$  besitzt ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  genau dann ein Vektorpotential  $\vec{A}$ , wenn  $\vec{F}$  auf  $D$  quellenfrei ist:

$$\exists \vec{A}: \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = 0.$$

Das Vektorpotential ist bis auf ein Gradientenfeld eines beliebigen Skalarfeldes  $U$  eindeutig bestimmt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \vec{A} + \operatorname{grad} U.$$

Wählt man  $U$  als Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta U = \operatorname{div} \vec{A},$$

so ist  $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ , d.h. man erhält ein quellenfreies Vektorpotential. Diese spezielle Wahl wird als Eichung des Vektorpotentials bezeichnet.

## Beweis:

(i) Für ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{A}$  gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$$

$\implies$  Notwendigkeit der Quellenfreiheit

(ii) definiere ein Vektorpotential  $\vec{A}$  durch

$$A_x = \frac{1}{3} \int \int (\partial_y F_y - \partial_z F_z) dy dz$$

$$A_y = \frac{1}{3} \int \int (\partial_z F_z - \partial_x F_x) dx dz$$

$$A_z = \frac{1}{3} \int \int (\partial_x F_x - \partial_y F_y) dx dy$$

zweite Komponente von  $\operatorname{rot} \vec{A}$

$$\partial_z A_x - \partial_x A_z = \int (\partial_y \partial_z A_x - \partial_x \partial_y A_z) dy$$

Einsetzen der Definition von  $A_x$  und  $A_z$   $\rightsquigarrow$

$$\int (\partial_y \partial_z A_x - \partial_x \partial_y A_z) dy = \frac{1}{3} \int (\partial_y F_y \underbrace{-\partial_z F_z - \partial_x F_x}_{=\partial_y F_y} + \partial_y F_y) dy = F_y$$

$$(\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow -\partial_z F_z - \partial_x F_x = \partial_y F_y)$$

analog:  $\partial_x A_y - \partial_y A_x = F_z$  und  $\partial_y A_z - \partial_z A_y = F_x$ , also  $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$   
 $\implies$  Quellenfreiheit hinreichend

(iii) Gilt

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B},$$

so ist  $\vec{A} - \vec{B}$  rotationsfrei und besitzt also ein skalares Potential  $U$ .

## Konstruktion eines Vektorpotentials

Für ein quellenfreies, stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{F}$  lässt sich durch

$$\vec{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

ein Vektorpotential definieren, wenn die Integranden an den entsprechenden Punkten definiert sind. Dies ist zum Beispiel der Fall für einen Quader, der die Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$  und  $(x, y, z)$  enthält. Analoge Formeln erhält man durch zyklisches Vertauschen der Variablen. Anstelle von  $A_x$  können ebenfalls  $A_y$  oder  $A_z$  null gesetzt werden.

Beweis:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ - \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} -\partial_y \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi - \partial_z \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi + \partial_z \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \\ \partial_x \int_{x_0}^x F_y(\xi, y, z) d\xi \\ \partial_x \int_{x_0}^x F_z(\xi, y, z) d\xi - \partial_x \int_{z_0}^z F_x(x_0, y, \zeta) d\zeta \end{pmatrix}$$

## Vertauschung von Differentiation und Integration $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} -\int_{x_0}^x \partial_y F_y(\xi, y, z) d\xi - \int_{x_0}^x \partial_z F_z(\xi, y, z) d\xi + F_x(x_0, y, z) \\ F_y(x, y, z) \\ F_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$$(\partial_x F_x(x_0, y, \xi) = 0)$$

$$\vec{F} \text{ quellenfrei} \implies \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z = 0$$

Einsetzen in die erste Komponente  $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \partial_x F_x(\xi, y, z) d\xi + F_x(x_0, y, z) &= [F_x(\xi, y, z)]_{\xi=x_0}^{\xi=x} + F_x(x_0, y, z) \\ &= F_x(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\implies \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{F}$$

## Beispiel:

Konstruktion eines Vektorpotentials  $\vec{A}$  für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \vec{a} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} a_2 z - a_3 y \\ a_3 x - a_1 z \\ a_1 y - a_2 x \end{pmatrix}$$

$\operatorname{div} \vec{F} = 0 + 0 + 0 \implies$  Existenz von  $\vec{A}$

Basispunkt  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0) \rightsquigarrow$

$$I_{xz} = \int_0^x F_z(\xi, y, z) d\xi = \int_0^x a_1 y - a_2 \xi d\xi = a_1 xy - a_2 x^2/2$$

$$I_{zx} = \int_0^z F_x(0, y, \zeta) d\zeta = \int_0^z a_2 \zeta - a_3 y d\zeta = a_2 z^2/2 - a_3 yz$$

$$I_{xy} = \int_0^x F_y(\xi, y, z) d\xi = \int_0^x a_3\xi - a_1z d\xi = a_3x^2/2 - a_1xz$$

↪ Vektorpotential

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_{xz} - I_{zx} \\ -I_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1xy + a_3yz - (x^2 + z^2)a_2/2 \\ -a_3x^2/2 + a_1xz \end{pmatrix}$$

symmetrisches Vektorpotential:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} a_2xy - a_1y^2/2 \\ a_3yz - a_2z^2/2 \\ a_1zx - a_3x^2/2 \end{pmatrix}$$

Die Differenz

$$\vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} a_2xy - a_1y^2/2 \\ a_2x^2/2 - a_1xy \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist ein Gradientenfeld:

$$\vec{B} - \vec{A} = \text{grad } U, \quad U = a_2x^2y/2 - a_1xy^2/2$$