Existenz eines Vektorpotentials

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet D besitzt ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\vec{F}$ genau dann ein Vektorpotential $\vec{A}$, wenn $\vec{F}$ auf D quellenfrei ist:

$$\exists \vec{A}:\ \vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{div} \vec{F} = 0\,.$$

Das Vektorpotential ist bis auf ein Gradientenfeld eines beliebigen Skalarfeldes U eindeutig bestimmt:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \quad \Longrightarrow \quad \vec{B} = \vec{A} + \operatorname{grad} U\,.$$

Wählt man U als Lösung der Poisson-Gleichung

$$-\Delta U = \operatorname{div} \vec{A},$$

so ist $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, d.h. man erhält ein quellenfreies Vektorpotential. Diese spezielle Wahl wird als Eichung des Vektorpotentials bezeichnet.

Beweis:

(i) Für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{A}$ gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) = 0$$

$\Longrightarrow$ Notwendigkeit der Quellenfreiheit

(ii) definiere ein Vektorpotential $\vec{A}$ durch

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{3}\int\int(\partial_y F_y - \partial_z F_z)dydz \\ A_y &= \frac{1}{3}\int\int(\partial_z F_z - \partial_x F_x)dxdz \\ A_z &= \frac{1}{3}\int\int(\partial_x F_x - \partial_y F_y)dxdy \end{aligned}$$

zweite Komponente von rot $\vec{A}$

$$\partial_z A_x - \partial_x A_z = \int(\partial_y\partial_z A_x - \partial_x\partial_y A_z)dy$$

Einsetzen der Definition von A_x und A_z $\quad\rightsquigarrow$

$$\int(\partial_y\partial_z A_x - \partial_x\partial_y A_z)dy = \frac{1}{3}\int(\partial_y F_y \underbrace{-\partial_z F_z - \partial_x F_x}_{=\partial_y F_y} + \partial_y F_y)dy = F_y$$

($\operatorname{div} \vec{F} = 0 \Leftrightarrow -\partial_z F_z - \partial_x F_x = \partial_y F_y$)
analog: $\partial_x A_y - \partial_y A_x = F_z$ und $\partial_y A_z - \partial_z A_y = F_x$, also $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A}$
$\Longrightarrow$ Quellenfreiheit hinreichend

(iii) Gilt

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{B}\,,$$

so ist $\vec{A} - \vec{B}$ rotationsfrei und besitzt also ein skalares Potential U.