Arbeitsintegral

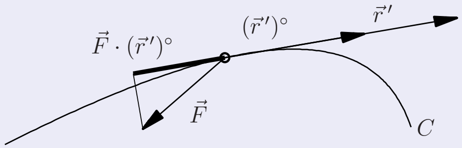
Für einen Weg C mit regulärer Parametrisierung

$$[a,b] \ni t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

und ein Vektorfeld $\vec{F}$ wird das Integral

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

als Arbeitsintegral bezeichnet.



Es entspricht dem Kurvenintegral der Projektion F_t von $\vec{F}$ in tangentialer Richtung,

$$F_t = \vec{F} \cdot \left(\vec{r}\,'\right)^\circ , \quad \left(\vec{r}\,'\right)^\circ = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|},$$

und ist unabhängig von der Parametrisierung bei gleichbleibender Orientierung des Weges.
Bei Umkehrung der Durchlaufrichtung von C ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

In Komponentenschreibweise hat das Arbeitsintegral die Form

$$\int\limits_C F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$$

mit $dx = x'(t)\,dt$, $dy = y'(t)\,dt$, $dz = z'(t)\,dt$ und F_x, F_y, F_z den Komponenten von $\vec{F}$.

Beispiel:

Beim Durchlaufen des Viertelkreises

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, \pi/2],$$

im Kraftfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

wird die Arbeit

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{\pi/2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} -2\cos t \sin t\,dt = \left[\cos^2 t\right]_0^{\pi/2} = -1 \end{aligned}$$

verrichtet.

Beispiel:

Für ein Geradenstück

$$C: \ t \mapsto \vec{r}(t) = \vec{p} + t\vec{d}, \quad t \in [a, b]$$

ist

$$\vec{r}'(t) = \vec{d}, \quad d\vec{r} = \vec{d}\, dt\,.$$

Definitionsgemäß ist somit für ein Vektorfeld $\vec{F}$ die verrichtete Arbeit

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{p} + t\vec{d}) \cdot \vec{d}\, dt\,.$$

Beispielsweise ist für

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b] = [0, 3]$$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^{\mathrm{t}} = (t, 1 + 2t)^{\mathrm{t}}$ und für

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

die verrichtete Arbeit

$$\begin{aligned} \int_0^3 \begin{pmatrix} 2t(1+2t) \\ t^2 + 1 + 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} dt &= \int_0^3 6t^2 + 6t + 2\, dt \\ &= \left[2t^3 + 3t^2 + 2t\right]_0^3 = 87\,. \end{aligned}$$