Länge einer Kurve

Die Länge L einer Kurve mit stetig differenzierbarer Parametrisierung $t \mapsto p(t)$, $a \leq t \leq b$, ist

$$\int_a^b |p'(t)| \, \mathrm{d}t \, .$$

Speziell gilt für eine Kurve in der xy-Ebene mit der Parameterdarstellung $p(t) = (x(t), y(t))$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, \mathrm{d}t \, .$$

Insbesondere hat der Graph einer Funktion $y = f(x)$, $x \in [c, d]$ die Länge

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}x \, .$$

Die Länge des Kurvenstücks zwischen $p(a)$ und $p(t)$,

$$s(t) = \int_a^t |p'(\tau)| \,\mathrm{d}\tau \,,$$

kann als kanonischer Kurvenparameter benutzt werden. Man erhält die sogenannte Parametrisierung nach Bogenlänge:

$$q(s) = p(t), \quad |q'| = 1 \,.$$

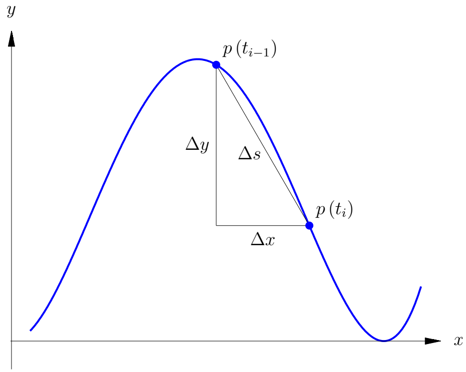
Aufgrund des normierten Tangentenvektors gilt für diese kanonische Parametrisierung

$$\int_C f = \int_0^L f(q(s)) \,\mathrm{d}s$$

mit L der Länge von C.

Beweis

Länge einer ebenen Kurve:
Approximation durch Streckenzug zu einer Partition des Parameterintervalls in Teilintervalle $[t_{i-1}, t_i]$



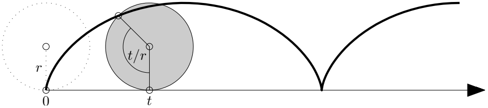
Mittelwertsatz $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(p_1'(\xi_i))^2 + (p_2'(\eta_i))^2}\,\Delta t_i\end{aligned}$$

mit $\xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i]$
Riemann-Summe des angegebenen Integrals

Beispiel

Parametrisierung und Länge einer Zykloide, die die Bahnkurve eines Punktes auf einem rollenden Kreis beschreibt



Bahnkurve (Abrollen entlang der x-Achse, Radius r)

$$\begin{aligned} x(t) &= t + r\cos(3\pi/2 - t/r) = t - r\sin(t/r) \\ y(t) &= r + r\sin(3\pi/2 - t/r) = r - r\cos(t/r) \end{aligned}$$

denn $t = (2\pi r) \cdot \text{Drehwinkel } (2\pi) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Drehwinkel} = t/r$

$$\cos(3\pi/2 - \alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(3\pi/2 - \alpha) = -\cos\alpha$$

Länge des Bogens für $t \in [0, 2\pi r]$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi r} \sqrt{(1-\cos(t/r))^2 + (\sin(t/r))^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Substitution $s = t/r$, $\mathrm{d}t = r\,\mathrm{d}s$ und Identitäten

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1\,, \quad 1 - \cos\varphi = 2\,\sin^2(\varphi/2)$$

$\Longrightarrow$

$$L = r\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(s))}\,\mathrm{d}s = r\int_0^{2\pi} 2\sin(s/2)\,\mathrm{d}s = 8\,r$$

Beispiel

Parametrisierung nach Bogenlänge $q(s)$ der Spirale

$$C: \quad p(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad p'(t) = \exp(t)\begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$$

Definition $\implies$

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_0^t |p'(\tau)|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \sqrt{2}\exp(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sqrt{2}(\exp(t) - 1) \\ \text{bzw. } t(s) &= \ln(s/\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

Einsetzen in Parametrisierung p $\implies$

$$q(s) = (s/\sqrt{2} + 1)\begin{pmatrix} \cos(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \\ \sin(\ln(s/\sqrt{2} + 1)) \end{pmatrix}$$