Spur

Die Spur einer $n \times n$-Matrix A ist die Summe ihrer Diagonalenelemente:

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}\,.$$

Für beliebige quadratische Matrizen A, B und invertierbare Matrizen Q gilt

$$\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA), \quad \operatorname{Spur}(Q^{-1}AQ) = \operatorname{Spur} A\,.$$

Aufgrund letzterer Eigenschaft, der Invarianz der Spur unter Koordinatentransformationen, insbesondere auch unter Transformationen auf Diagonal- oder Dreiecksform, kann die Spur einer Matrix auch als Summe der Eigenwerte (entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt) berechnet werden:

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\,.$$

Beweis

(i) $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$:
Definition der Spur und des Matrix-Produkts mit $C = AB$, $D = BA$ $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{Spur} C = \sum_j c_{j,j} = \sum_j \sum_k a_{j,k} b_{k,j} = \sum_k \underbrace{\sum_j b_{k,j} a_{j,k}}_{d_{k,k}} = \operatorname{Spur} D$$

(ii) $\operatorname{Spur}(Q^{-1}AQ) = \operatorname{Spur} A$:
Anwendung von (i) auf das Produkt von Q^{-1} und $(AQ)Q$ $\rightsquigarrow$

$$\operatorname{Spur}(Q^{-1}(AQ)) = \operatorname{Spur}((AQ)Q^{-1}) \underset{QQ^{-1}=E}{=} \operatorname{Spur} A$$

(iii) $\operatorname{Spur} A = \sum_k \lambda_k$:
(ii) $\implies$ Invarianz der Spur bei Ähnlichkeitstransformation auf Jordan-Form ($A \to J = Q^{-1}AQ$)
Die Diagonale von J enthält die Eigenwerte von A und folglich ist $\operatorname{Spur} A = \operatorname{Spur} J = \sum_k \lambda_k$.

Beispiel

Illustration der Eigenschaften des Spur-Operators für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(i) Matrixprodukt:

$$AB = \begin{pmatrix} 18 & 13 \\ 16 & 11 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 10 & 25 \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{Spur}(AB) = 18 + 11 = 29 = 4 + 25 = \mathrm{Spur}(BA)$

(ii) Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} Q^{-1}AQ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 16 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und $\mathrm{Spur}(Q^{-1}AQ) = 5 + (-1) = 4 = 1 + 3 = \mathrm{Spur}\, A$

(iii) Eigenwerte:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Eigenwerte $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = -1$ und

$$\operatorname{Spur} A = 5 + (-1) = 4 \quad \checkmark$$