Basiswechsel

Bei einem Basiswechsel $E \to E'$ transformieren sich die Koordinaten eines Vektors v gemäß $v_{E'} = T_{EE'}(v_E)$.

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dl, "B_E"'] \arrow[dr, "B_{E'}"] & \\
K^n \arrow[rr, "T_{EE'}"'] & & K^n
\end{tikzcd}
$$

Dabei ist $T_{EE'} = B_{E'} \circ B_E^{-1}$ mit den Abbildungen

$$B_E : v \to v_E\,,\; B_{E'} : v \to v_{E'}\,,$$

die Vektoren v ihre Koordinaten bzgl. der Basen E und E' zuordnen.

Die Koordinatentransformation $T_{EE'}$ kann durch eine quadratische Matrix A dargestellt werden:

$$v_{E'} = A v_E \, .$$

Die Spalten der Matrix A enthalten die Koeffizienten der Basisvektoren e_k bzgl. der Basis E':

$$e_k = \sum_j a_{j,k} e'_j \, .$$

Beweis:

Darstellung von v bezüglich der Basen E und E':

$$\sum_k c_k e_k = v = \sum_k c'_k e'_k$$

Darstellung von e_k bezüglich der Basis E' $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} v &= \sum_k c_k e_k = \sum_k c_k \left(\sum_j a_{j,k} e'_j \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} c_k \right) e'_j = \sum_j c'_j e'_j \end{aligned}$$

Koordinatenvergleich $\quad \Rightarrow \quad v_{E'} = A v_E$

Beispiel:

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad E' = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Darstellung von e_k als Linearkombination von e'_j

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3/2 & -7/2 \end{pmatrix}$$

Basiskoeffizient von $v = (2,5)^{\mathrm{t}}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \implies v_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umrechnung

$$v_{E'} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3/2 & -7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{13}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\checkmark$