Koordinatentransformation bei Basiswechsel

Für zwei Basen $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{f_1, \ldots, f_n\}$ eines Vektorraums V kann die Umrechnung der Koordinaten x und y eines Elements $v \in V$,

$$v = \sum_k x_k e_k \quad \rightarrow \quad v = \sum_j y_j f_j$$

durch eine quadratische Matrix A beschrieben werden:

$$y = Ax \quad \Longleftrightarrow \quad y_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} x_k, \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Die k-te Spalte der Matrix A enthält die Koeffizienten von e_k bezüglich der Basis $\{f_1, \ldots, f_n\}$, d.h.

$$e_k = \sum_{j=1}^{n} a_{j,k} f_j\,.$$

Für $V = K^n$ ($K = \mathbb{R}^n$, $K = \mathbb{C}^n$, $\ldots$) können die Basisvektoren jeweils spaltenweise in einer Matrix zusammengefasst werden:

$$E = (e_1, \ldots, e_n), \quad F = (f_1, \ldots, f_n)\,.$$

Die Transformationsmatrix A lässt sich in diesem Fall als Matrixprodukt schreiben

$$E = FA \quad \Longleftrightarrow \quad A = EF^{-1}\,.$$

Beweis

Darstellung von v bezüglich der Basen E und F:

$$\sum_k x_k e_k = v = \sum_j y_j e_j$$

Darstellung von e_k bezüglich der Basis F $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} v &= \sum_k x_k e_k = \sum_k x_k \left(\sum_j a_{j,k} f_j \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_{j,k} x_k \right) f_j = \sum_j y_j f_j \end{aligned}$$

Koordinatenvergleich $\quad \Longrightarrow \quad y = Ax$

Beispiel

Koordinatentransformation für die Basen

$$\{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad \{f_1, f_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Darstellung von e_k als Linearkombination von f_j: $e_k = a_{1,k} f_1 + a_{2,k} f_2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{7}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Transformationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3/2 & -7/2 \end{pmatrix}$$

alternative Berechnung mit den Matrizen $E = (e_1, e_2)$, $F = (f_1, f_2)$

$$A = EF^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Koordinaten x von $v = (2,5)^t$ bezüglich $\{e_1, e_2\}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umrechnung von x in Koordinaten bezüglich $\{f_1, f_2\}$ $\quad \rightsquigarrow$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3/2 & -7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

Probe

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} v \stackrel{!}{=} y_1 f_1 + y_2 f_2 = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{13}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$