Basis aus Eigenvektoren

Existiert zu einer $n \times n$-Matrix A eine Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ aus Eigenvektoren, so hat die lineare Abbildung $L: x \mapsto Ax$ bzgl. dieser Basis Diagonalform,

$$V^{-1}AV = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad V = (v_1, \ldots, v_n)\,,$$

mit λ_k dem Eigenwert zu v_k. Mit anderen Worten: Sind y_k die Koordinaten eines Vektors x bezüglich B, so sind $\lambda_k y_k$ die Koordinaten von $L(x)$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} y_k v_k \quad \implies \quad L(x) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k y_k) v_k\,.$$

Beweis

(i) Diagonalisierung:
Zusammenfassen von $Av_k = \lambda_k v_k$, $k = 1, \ldots, n$ als Spalten einer Matrix $\rightsquigarrow$

$$AV = A(v_1, \ldots, v_n) = (v_1\lambda_1, \ldots, v_n\lambda_n) = VD, \quad D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,,$$

d.h, $V^{-1}AV = D$

(ii) Basiswechsel:
$x = \sum_k v_k y_k = Vy$, $L(x) = Ax = \sum_k v_k \tilde{y}_k = V\tilde{y} \quad \Longrightarrow$

$$\tilde{y} = V^{-1}Ax = V^{-1}AVy\,,$$

d.h. $D = V^{-1}AV$ ist die Matrixdarstellung von L bzgl. der Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$

Beispiel

Diagonalisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

(i) Eigenwerte:
Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 6 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-5-\lambda) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 2$$

Lösungsformel für quadratische Gleichungen

$\rightsquigarrow \quad -1/2 \pm \sqrt{1/4+2} = -1/2 \pm 3/2$

$\rightsquigarrow \quad$ Eigenwerte $\lambda_+ = 1$, $\lambda_- = -2$

(ii) Eigenvektoren:
Lösungen des linearen Gleichungssystems $(A - \lambda E)v = (0,0)^{\mathrm{t}}$

- $\lambda_+ = 1$
$$\begin{pmatrix} 4-1 & 6 \\ -3 & -5-1 \end{pmatrix} v_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_+ \parallel \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
- $\lambda_- = -2$
$$\begin{pmatrix} 4+2 & 6 \\ -3 & -5+2 \end{pmatrix} v_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad v_- \parallel \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Ähnlichkeitstransformation:
Transformmationsmatrix mit Eigenvektoren als Spalten
$$V = (v_+, v_-) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Cramersche Regel $\quad\rightsquigarrow\quad$ Inverse
$$V^{-1} = \frac{1}{\det V} \begin{pmatrix} v_{2,2} & -v_{1,2} \\ -v_{2,1} & v_{1,1} \end{pmatrix} \underset{\det V = 1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \qquad V^{-1}AV = D,\ VDV^{-1} \text{ mit } D = \operatorname{diag}(1, -2)$$

Probe Ausmultiplizieren der Matrizen

$$
\begin{aligned}
D = V^{-1}AV &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \checkmark
\end{aligned}
$$