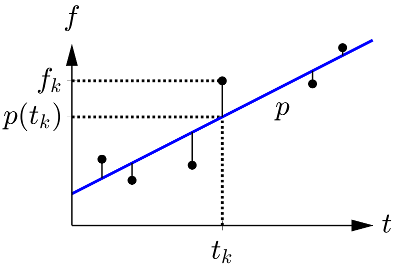
Ausgleichsgerade

Eine Gerade $g: p(t) = u + vt$, die Daten (t_k, f_k), $k = 1, \ldots, n$, bestmöglichst approximiert ($p(t_k) \approx f_k$), kann durch Minimierung der Fehlerquadratsumme

$$\sum_{k=1}^{n} (p(t_k) - f_k)^2$$



ermittelt werden.
Der Achsenabschnitt u und die Steigung v berechnen sich gemäß

$$u = \frac{(\sum t_k^2)(\sum f_k) - (\sum t_k)(\sum t_k f_k)}{n(\sum t_k^2) - (\sum t_k)^2}, \quad v = \frac{n(\sum t_k f_k) - (\sum t_k)(\sum f_k)}{n(\sum t_k^2) - (\sum t_k)^2},$$

wobei (sinnvollerweise) angenommen wird, dass mindestens zwei Abszissen t_k verschieden sind.

Beweis

(u, v) minimal $\quad \Longrightarrow$
Ableitungen der Fehlerquadratsumme $\sum_k (u + vt_k - f_k)^2$ nach u und v Null:

$$
\begin{aligned}
0 &= 2\sum_k (u + vt_k - f_k) \\
0 &= 2\sum_k t_k(u + vt_k - f_k)
\end{aligned}
$$

bzw. in Matrixform

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} n & \sum t_k \\ \sum t_k & \sum t_k^2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum f_k \\ \sum t_k f_k \end{pmatrix}
$$

mindestens zwei t_k verschieden, Cauchy-Schwarz-Ungleichung $\quad \Longrightarrow$

$$
\det A = \underbrace{|(1, \ldots, 1)|^2}_{=n} \, |(t_1, \ldots, t_n)|_2^2 - \left(\sum_k 1 \cdot t_k \right)^2 > 0 \,,
$$

da $(1, \ldots, 1)$ und $(t_1, \ldots, t_n)$ nicht parallel sind
Cramersche Regel $\quad \rightsquigarrow \quad$ angegebene Formeln für u und v

Beispiel

Bestimmung der Ausgleichsgerade $g: t \mapsto p(t) = u + tv$ zu den Daten

t_k	-1	0	2
f_k	-3	1	4

$$\sum t_k = 1, \sum f_k = 2, \sum t_k^2 = 5, \sum t_k f_k = 11$$

Einsetzen in die Formeln für u und v $\rightsquigarrow$

$$u = \frac{(\sum t_k^2)(\sum f_k) - (\sum t_k)(\sum t_k f_k)}{n(\sum t_k^2) - (\sum t_k)^2} = \frac{5 \cdot 2 - 1 \cdot 11}{3 \cdot 5 - 1^2} = -\frac{1}{14}$$

$$v = \frac{n(\sum t_k f_k) - (\sum t_k)(\sum f_k)}{n(\sum t_k^2) - (\sum t_k)^2} = \frac{3 \cdot 11 - 1 \cdot 2}{3 \cdot 5 - 1^2} = \frac{31}{14}$$