Elementare konforme Abbildungen

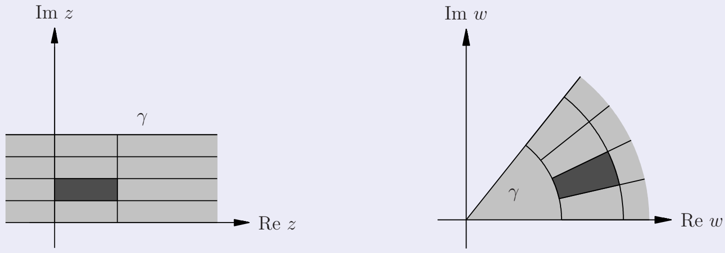
Durch $w = \mathrm{e}^z$ wird der Streifen

$$z: \; 0 < \operatorname{Im} z < \gamma$$

mit $\gamma \leq 2\pi$ auf den Sektor

$$w: \; 0 < \arg w < \gamma$$

abgebildet.
Insbesondere erhält man für $\gamma = 2\pi$ als Bild die geschlitzte Ebene $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_0^+$.
Durch Verknüpfung mit einer Potenzfunktion, $z \mapsto w^s$, kann der Öffnungswinkel des Sektors verändert werden: $\gamma \to \gamma s$.



z-Ebene w-Ebene

Entsprechend kann man mit Hilfe des komplexen Logarithmus Sektoren konform auf Streifen abbilden.

Beispiel:

konforme Abbildung eines Streifens auf eine Kreisscheibe:

$$0 < \operatorname{Im} z < \pi/2 \quad \rightarrow \quad |w| < 1$$

Zerlegung in elementare Teilabbildungen

- Streifen $\rightarrow$ Sektor:

$$\xi = \mathrm{e}^z : \quad 0 < \arg \xi < \pi/2$$

- Sektor $\rightarrow$ Halbebene:

$$\eta = \xi^2 : \quad 0 < \operatorname{Im} \eta$$

- (iii) Halbebene $\rightarrow$ Kreisscheibe:

$$w = \frac{a\eta + b}{c\eta + d}$$

bestimme die Koeffizienten der Möbius-Transformation $\eta \mapsto w$ durch Wahl geeigneter Bildpunkte mit konsistenter Reihenfolge (Gebiet liegt „links")

$$\eta = 0, 1, \infty \quad \mapsto \quad w = 1, \mathrm{i}, -1$$

$0 \mapsto 1 \quad \Longrightarrow \quad d = b$

$\infty \mapsto -1 \quad \Longrightarrow \quad c = -a$ (o.B.d.A. $a = 1$)

$1 \mapsto \mathrm{i} \quad \Longrightarrow$

$$\frac{1+b}{-1+b} = \mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad b = -\mathrm{i}$$

zusammengesetzte Transformation

$$w = \frac{\eta - \mathrm{i}}{-\eta - \mathrm{i}} = \frac{\xi^2 - \mathrm{i}}{-\xi^2 - \mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{2z} - \mathrm{i}}{-\mathrm{e}^{2z} - \mathrm{i}}$$

Beispiel:

Konstruktion der Joukowski-Abbildung

$$z \mapsto w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad K: |z| < 1 \quad \to \quad D = \mathbb{C}\backslash[-1,1]$$

- Möbius-Transformation: $K \to$ Halbebene $H : \operatorname{Re} z > 0$

$$\xi = \frac{1+z}{1-z}, \quad 1, \mathrm{i}, -1 \mapsto \infty, \mathrm{i}, 0$$

- Quadrieren: $H \to$ geschlitzte Ebene $E = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$

$$\eta = \xi^2, \qquad |\arg \xi| < \frac{\pi}{2} \to |\arg \eta| < \pi$$

- Möbius-Transformation: $E \to D$

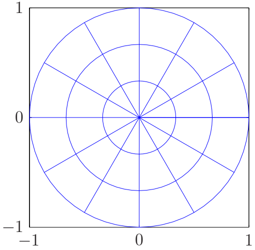
$$w = \frac{\eta+1}{\eta-1}, \quad -\infty, -1, 0 \mapsto 1, 0, -1$$

$\rightsquigarrow$ korrekte Abbildung des Komplements: $(-\infty, 0) \to (-1, 1)$

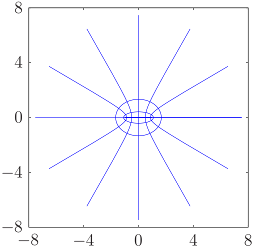
Gesamtabbildung

$$w = \frac{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1} = \cdots = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Bild des orthogonalen Gitters $r = |z| = \text{const}$, $\varphi = \arg(z) = \text{const}$



z-Ebene



w-Ebene