Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen

Eine komplexe Funktion

$$f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)\,, \quad z = x + \mathrm{i}y$$

ist genau dann komplex differenzierbar, wenn die bivariate reelle Funktion $f(x, y) = (u, v)^t$ total differenzierbar ist und die partiellen Ableitungen den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen genügen:

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x\,.$$

In diesem Fall ist

$$f' = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y\,.$$

Es sind dann sowohl u als auch v harmonisch, d.h.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 = \Delta v\,.$$

Beweis:

(i) Komplexe Differenzierbarkeit:

$$f(z+\triangle z) = f(z) + f'(z)\triangle z + o(|\triangle z|), \quad \triangle z = \triangle x + \mathrm{i}\triangle y$$

Aufspaltung in Real- und Imaginärteil mit $f'(z) = a + \mathrm{i}b \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{pmatrix} u(x+\triangle x, y+\triangle y) \\ v(x+\triangle x, y+\triangle y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} + \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}}_{J} \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix} \Bigg]$$

$$+o\left(\left| \begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix} \right| \right)$$

wobei $f'(z)\Delta z = (a\Delta x - b\Delta y) + (a\Delta y + b\Delta x)\mathrm{i}$ und somit

$$[\ldots] = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\, f'(z)\Delta z \\ \mathrm{Im}\, f'(z)\Delta z \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ reelle Differenzierbarkeit mit J der Jacobi-Matrix

Vergleich mit der reellen Jacobi Matrix

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \mathrm{J} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen:

$$u_x = v_y\,, \quad u_y = -v_x$$

(ii) Komplexe Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(z) &= a + \mathrm{i}b \\ &= u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_y \end{aligned}$$

(iii) Harmonizität:
Vertauschbarkeit partieller Ableitungen $\rightsquigarrow$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x + (-v_x)_y = 0$$

analog: $\Delta v = 0$

Beispiel:

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \underbrace{\mathrm{e}^x \cos y}_{u} + \mathrm{i}\, \underbrace{\mathrm{e}^x \sin y}_{v}$$

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \mathrm{e}^x \cos y = v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -\mathrm{e}^x \sin y = -v_x(x,y) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ komplexe Differenzierbarkeit $\forall z$ und

$$f'(z) = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^z$$

u und v harmonisch:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{e}^x(-\cos y) = 0$$

analog: $\Delta v = 0$