Binomialkoeffizient

Der Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdots(k-1)k}, \quad n,k \in \mathbb{N}_0,\ n \geq k\,,$$

gibt die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen an.

Insbesondere gilt aufgrund der Konvention $0! = 1$

$$\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) = 1, \quad \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = 1\,,$$

und aus der Definition folgt ebenfalls unmittelbar

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}\,.$$

Beispiel

2-elementige Teilmengen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$

5 Möglichkeiten für das erste Element, 4 Möglichkeiten für das zweite Element (keine gleichen Elemente) $\quad\rightsquigarrow$

$$5 \cdot 4 \text{ mögliche Paare}$$

Irrelevanz der Reihenfolge der Elemente von Mengen ($\{u, v\} = \{v, u\}$)
$\implies$ Division durch 2, d.h.

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{5!/3!}{2!} = \binom{5}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

$\rightsquigarrow$ Teilmengen

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}$$

Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ lassen sich mit Hilfe der Rekursion

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

in einem Dreiecksschema, dem sogenannten Pascalschen Dreieck, berechnen.

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\binom{0}{k} & & & & 1 & & & \\
\binom{1}{k} & & & 1 & & 1 & & \\
\binom{2}{k} & & 1 & & 2 & & 1 & \\
 & & & \searrow + \swarrow & & \searrow + \swarrow & & \\
\binom{3}{k} & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

Beweis

zu zeigende Rekursion:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k},$$

d.h.

$$\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!} = \frac{n!}{(n-k+1)!\,(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Division durch $n!$ und Multiplikation mit $(n-k+1)!\,k!$ $\quad\rightsquigarrow$

$$n+1 = k + (n+1-k) \quad \checkmark$$

Binomische Formel

Mit der binomischen Formel lassen sich Potenzen einer Summe von zwei Variablen berechnen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist für $n = 2, 3$

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \,, \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 \,.\end{aligned}$$

Beweis

vollständige Induktion

- Induktionsanfang ($n = 0$):

$$\sum_{k=0}^{0} \left(\begin{array}{c} 0 \\ k \end{array} \right) a^{0-k} b^k = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) a^0 b^0 = 1 = (a+b)^0$$

- Induktionsschluss ($n \to n+1$):
  Induktionsvoraussetzung $\implies$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\,(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Indexverschiebung ($k \leftarrow k-1$) im zweiten Summand $b \sum \ldots \quad \rightsquigarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\begin{array}{c} n \\ k-1 \end{array} \right) a^{n-k+1} b^k$$

Konvention $\binom{n}{n+1} = 0 = \binom{n}{-1}$ $\rightsquigarrow$ Summation jeweils von 0 bis $n+1$

Rekursion für Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

$\rightsquigarrow$ Formel für $(a+b)^{n+1}$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k$$

Identitäten für Binomialkoeffizienten

Für Binomialkoeffizienten gelten folgende Identitäten:

$$
\begin{aligned}
2^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \\
0 &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k, \quad n \geq 1, \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}, \quad k < n, \\
\binom{n}{k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \binom{k-1+i}{k-1}, \quad k > 0.
\end{aligned}
$$

Beweis

(i) Erste und zweite Identität:
Folgerungen aus dem Binomischen Lehrsatz,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \,,$$

mit $a = b = 1$ bzw. $a = -b = 1$

(ii) Dritte Identität:
wiederholte Anwendung der Rekursionsformel $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \\
&= \cdots \\
&= \binom{n-1}{k} + \binom{n-2}{k-1} + \cdots + \binom{n-k}{1} + \binom{n-k}{0}
\end{aligned}$$

Ersetzen des letzten Binomialkoeffizienten $\binom{n-k}{0}$ durch $\binom{n-k-1}{0}$ $\quad\rightsquigarrow$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{n-k-1+i}{i}$$

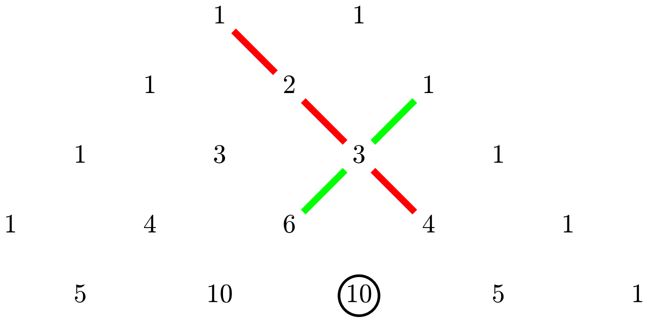
d.h. die dritte Identität

(iii) Vierte Identität:
Substitution $k' = n - k \quad \rightsquigarrow$

$$\binom{n}{n-k'} = \sum_{i=0}^{k'} \binom{n-k'-1+i}{n-k'-1}$$

$\binom{m}{j} = \binom{m}{m-j}$ mit $j = n - k'$ und $j = n - k' - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad$ Äquivalenz zur dritten Identität

Illustration der letzten beiden Identitäten als Summationswege im Pascalschen Dreieck



dritte Identität: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

vierte Identität: $1 + 3 + 6 = 10$