Fourieranalysis

Periodische, quadratintegrierbare Funktionen

Der Raum der 2π-periodischen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

und der durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} \, dx$$

induzierten Norm $\| \cdot \|_{2\pi}$ wird mit $L^2_{2\pi}$ bezeichnet.

Alternativ kann der Raum der 2π-periodischen quadratintegrierbaren Funktionen auch als Abschluss der glatten Funktionen definiert werden, d.h. jede Funktion $f \in L^2_{2\pi}$ lässt sich durch eine Folge unendlich oft differenzierbarer Funktionen f_n approximieren:

$$\|f - f_n\|_{2\pi} \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

Orthogonalität von Kosinus und Sinus

Die Funktionen

$$1\,,\quad \cos(kx)\,,\quad \sin(kx)\,,\quad k>0\,,$$

bilden ein Orthogonalsystem im Raum der quadratintegrierbaren 2π-periodischen Funktionen:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(kx)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\sin(\ell x)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(jx)\sin(kx)\,dx=0$$

für $j\neq k$ und

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2(kx)\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2(kx)\,dx=\pi$$

für $k>0$.

Beweis:

(i) Orthogonalität von Kosinus-Funktionen:
Additionstheorem,

$$\frac{1}{2}\left(\cos\left((j-k)\,x\right)+\cos\left((j+k)\,x\right)\right)=\cos(jx)\cos(kx),\quad j\neq k$$

$\Longrightarrow$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\cos(kx)\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos((j-k)x)\,dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos((j+k)x)\,dx\right)$$

Stammfunktionen $c\sin(\ldots)$ verschwinden bei $\pm\pi$
$\rightsquigarrow \quad \int\ldots=0$

(ii) Orthogonalität von Kosinus und Sinus:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos(jx)\sin(\ell x)\,dx=0\,,$$

da Integral einer ungeraden Funktion über symmetrisches Intervall

(iii) Orthogonalität von Sinus-Funktionen:
partielle Integration $\implies$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(jx)\sin(kx)\,dx = \frac{j}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(jx)\cos(kx)\,dx$$

null nach (i)

(iv) Normierung von Kosinus und Sinus:
partielle Integration $\implies$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\,dx$$

Summe der Integrale gleich 2π wegen $\cos^2 + \sin^2 = 1$
$\implies$ gemeinsamer Wert π

Reelle Fourier-Reihe

Die reelle Fourier-Reihe einer reellen 2π-periodischen Funktion f ist die Entwicklung nach dem Orthogonalsystem der Kosinus- und Sinusfunktionen:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

mit

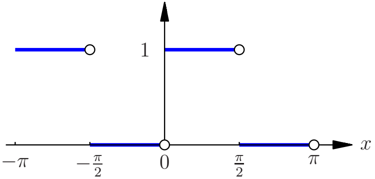
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \quad k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Die Art der Konvergenz der Reihe hängt von der Glattheit von f ab. Hinreichend für absolute Konvergenz ist beispielsweise, dass die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k absolut konvergente Reihen bilden.

Auch eine konvergente Fourier-Reihe muss nicht an allen Stellen den Funktionswert als Grenzwert haben. An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe meist gegen den Mittelwert aus rechtsseitigem und linksseitigem Funktionsgrenzwert. Daher wird im Allgemeinen $f(x) \sim \sum \cdots$ statt $f(x) = \sum \cdots$ geschrieben.

Beispiel:

reelle Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion



$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, -\pi/2) \cup [0, \pi/2) \\ 0, & x \in [-\pi/2, 0) \cup [\pi/2, \pi) \end{cases}$$

(i) Kosinus-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$$

$k \geq 1$: Kosinus gerade $\quad \Longrightarrow$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\pi/2} \cos(kt)\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \cos(kt)\, dt \right) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(kt)\, dt = 0$$

(ii) Sinus-Koeffizienten:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\pi/2}\sin(kt)\,dt + \int_0^{\pi/2}\sin(kt)\,dt\right) \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_{-\pi}^{-\pi/2} + \left[-\frac{\cos(kt)}{k}\right]_0^{\pi/2}\right) \\ &= \frac{1}{k\pi}\left(-2\cos(k\pi/2) + (-1)^k + 1\right) \end{aligned}$$

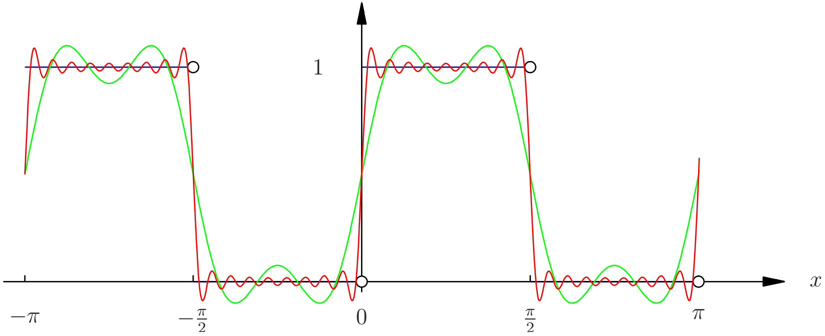
k ungerade: $b_k = 0$
$k = 4m$: $b_{4m} = 0$
$k = 4m+2$: $b_{4m+2} = 4/((4m+2)\pi)$
(iii) Fourier-Reihe von f:

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin\left((4m+2)x\right)}{4m+2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(6x)}{6} + \cdots\right)$$

Partialsummen

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{n} \frac{\sin\left((4m+2)x\right)}{4m+2}$$

für $n = 2$ und $n = 8$



f unstetig $\quad\rightsquigarrow\quad$ langsame Konvergenz
Gibbsches Phänomen: Überschwingungen in der Nähe der Sprungstellen

Fourier-Reihen von geraden und ungeraden Funktionen

Die Fourier-Reihe einer geraden 2π-periodischen Funktion f ist eine reine Kosinus-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

mit

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt, \quad k \geq 0\,.$$

Entsprechend enthält die Fourier-Reihe einer ungeraden 2π-periodischen Funktion nur Sinus-Terme:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

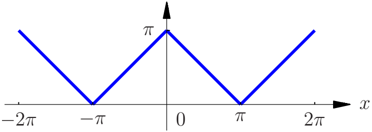
mit

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt, \quad k \geq 1\,.$$

Beide Aussagen folgen unmittelbar aus der Definition der Fourier-Koeffizienten, da die entsprechenden Integrale aus Symmetriegründen null sind bzw. nur über eine Hälfte des Symmetrieintervalls integriert werden muss.

Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der geraden Hutfunktion



$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & x \in [-\pi, 0) \\ \pi - x, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

reine Kosinus-Reihe ($b_k = 0$)

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \pi - t \, dt = \pi$$

$k \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) \cos(kt)\, dt \\
&\overset{\text{part. Int.}}{=} \frac{2}{\pi} \left[(\pi - t) \frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^\pi + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(kt)}{k}\, dt \\
&= 0 - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos(kt)}{k^2} \right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{k^2 \pi} \left(1 - (-1)^k \right)
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ Koeffizienten mit geradem Index null und

$$
a_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)^2 \pi}
$$

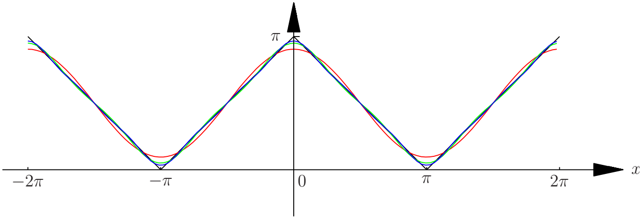
Fourier-Reihe:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos((2m+1)x)}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(x)}{1} + \frac{\cos(3x)}{9} + \cdots \right)$$

Spezialfall $x = 0$: $f(0) = \pi \quad \Longrightarrow$

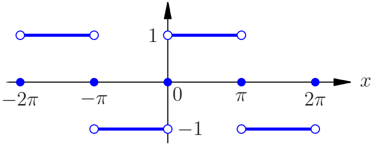
$$\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \cdots$$

erste drei Partialsummen



Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der ungeraden Funktion



$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi \\ -1, & x \in (-\pi, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, \pi) \end{cases}$$

reine Sinus-Reihe ($a_k = 0$)

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin(kt)\,dt = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(kt)}{k} \right]_0^\pi = \frac{2}{k\pi} \left(1 - (-1)^k \right)$$

$\Longrightarrow$ Koeffizienten mit geradem Index null und

$$b_{2m+1} = \frac{4}{(2m+1)\pi}$$

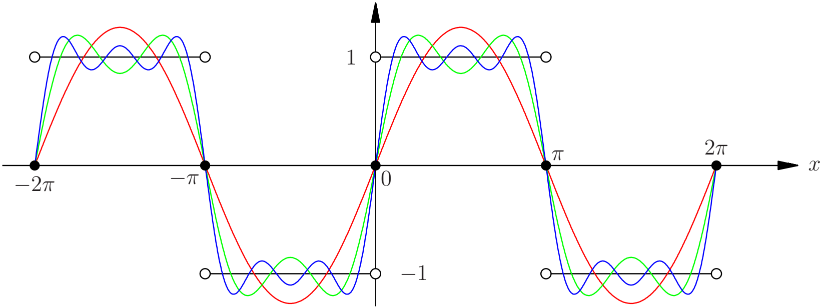
Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)x)}{2m+1} = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \cdots \right)$$

Spezialfall $x = \pi/2$: $f(\pi/2) = 1$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \mp \cdots$$

erste drei Partialsummen



Fourier-Basis

Die Exponentialfunktionen $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ sind im Raum der 2π-periodischen quadratintegrierbaren Funktionen orthonormal:

$$\langle e_j, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e_j(x) \overline{e_k(x)}\, dx = \delta_{j,k}$$

für $j, k \in \mathbb{Z}$.

Beweis:

$j = k$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}jx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1$$

$j \neq k$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)x}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(j-k)x}}{\mathrm{i}(j-k)}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

denn $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\ell} = 1$ für $\ell \in \mathbb{Z}$ $\quad\Longrightarrow$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ell\pi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell(-\pi)}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ell(2\pi)} - 1\right) = 0$$

Fourier-Reihe

Die komplexe Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion f ist die Entwicklung nach dem Orthonormalsystem $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e_k(x), \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e_k(t)}\, dt\,.$$

Die Konvergenz der Reihe hängt von der Glattheit von f bzw. dem Abfallverhalten der Fourier-Koeffizienten c_k ab.
Hinreichend für gleichmäßige Konvergenz ist $\sum_k |c_k| < \infty$.

Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$$

Umformung und Summenformel für eine geometrische Reihe $\quad \rightsquigarrow$

$$f(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{2}\right)^k$$

$(|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/2| < 1)$
Fourier-Reihe:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

Zusammenhang komplexer und reeller Fourier-Reihen

Die komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

lässt sich auch in Sinus-Kosinus-Form darstellen:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right) .$$

Für die Koeffizienten gelten die Umrechnungsformeln

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$$

bzw.

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{i}b_k)\,, \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{i}b_k)$$

für $k \geq 1$.

Die Fourier-Reihe ist genau dann reell, wenn $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Beweis:

Formel von Euler-Moivre

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$$

$\Longrightarrow$

$$c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + c_{-k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} = c_k\cos(kx) + \mathrm{i}c_k\sin(kx) + c_{-k}\cos(-kx) + \mathrm{i}c_{-k}\sin(-kx)$$

Symmetrie von Kosinus bzw. Antisymmetrie von Sinus $\quad\Longrightarrow$

$$a_k = c_k + c_{-k}\,, \quad b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$$

reelle Koeffizienten $\quad\Leftrightarrow$

$$a_k = \bar{a}_k \wedge b_k = \bar{b}_k$$

d.h.

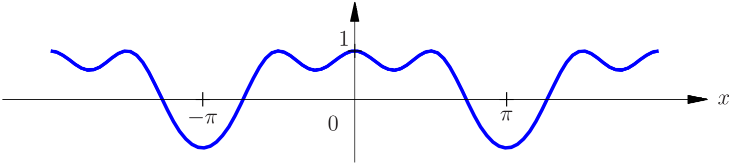
$$c_k + c_{-k} = \bar{c}_k + \bar{c}_{-k} \wedge c_k - c_{-k} = -\bar{c}_k + \bar{c}_{-k}$$

Addition der Gleichungen $\quad\rightsquigarrow\quad c_k = \bar{c}_{-k}$

Beispiel:

reelle und komplexe Fourier-Reihe der Funktion

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^3 x$$



gerade Funktion

$$f(x) = (1 - \cos^2 x)^2 + \cos^3 x = 1 - 2\cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

Umwandeln von $\cos^\ell x$ in Linearkombinationen von $\cos(kx)$

Additionstheoreme

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1\\ \cos(3x) &= \cos x\cos(2x) - \sin x \underbrace{\sin(2x)}_{=2\sin x\cos x} = 4\cos^3 x - 3\cos x\\ \cos(4x) &= 2\,(\cos(2x))^2 - 1 = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

Sukzessives Auflösen $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)\\ \cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos(3x)\\ \cos^4 x &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)\end{aligned}$$

Einsetzen in $f \quad \rightsquigarrow$

$$f(x) \;=\; \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$$

reelle Fourier-Koeffizienten ($b_k = 0$)

$$a_0 = \frac{3}{4}, \quad a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \frac{1}{8}$$

komplexe Fourier-Koeffizienten $c_k = c_{-k} = a_k/2$

$$c_0 = \frac{3}{8}, \quad c_{\pm 1} = \frac{3}{8}, \quad c_{\pm 2} = -\frac{1}{4}, \quad c_{\pm 3} = \frac{1}{8}, \quad c_{\pm 4} = \frac{1}{16}$$

komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \frac{3}{8}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} + \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x} + \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}$$

alternative Herleitung mit Hilfe der Formeln von Euler-Moivre

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$

Differentiation und Integration von Fourier-Reihen

Eine Fourier-Reihe kann gliedweise integriert und differenziert werden:

$$\int \sum_{k\neq 0} c_k e_k(x)\, dx = d_0 + \sum_{k\neq 0} d_k e_k(x), \quad d_k = (\mathrm{i}k)^{-1} c_k\,,$$

mit $d_0 \in \mathbb{R}$ bzw.

$$\frac{d}{dx} \sum_{k} d_k e_k(x) = \sum_{k\neq 0} c_k e_k(x), \quad c_k = (\mathrm{i}k) d_k\,,$$

mit $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$.
Dabei wird die Konvergenz der auftretenden Reihen vorausgesetzt.
Hinreichend dafür ist beispielsweise, dass die Beträge der Fourier-Koeffizienten quadratsummierbar sind:

$$\sum_k |c_k|^2 < \infty\,.$$

Ist das Absolutglied c_0 der Fourier-Reihe nicht null, so hat die Reihe keine periodische Stammfunktion und die gliedweise Integration liefert keine Fourier-Reihe mehr.

Beispiel:

Fourier-Reihe von

$$f(x) = |\sin x|$$

f gerade $\quad\rightsquigarrow\quad$ reine Kosinus-Reihe, $b_k = 0$ und

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \sin x \cos(kx)\, dx$$

zweimalige partielle Integration $\quad\rightsquigarrow$

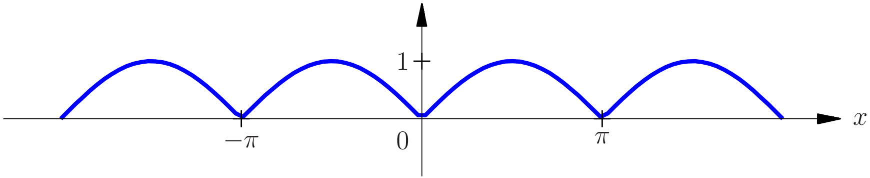
$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} a_k &= \left[\sin x \frac{\sin(kx)}{k}\right]_0^\pi - \int\limits_0^\pi \cos x \frac{\sin(kx)}{k}\, dx \\ &= 0 + \left[\cos x \frac{\cos(kx)}{k^2}\right]_0^\pi + \frac{1}{k^2} \underbrace{\int\limits_0^\pi \sin x \cos(kx)\, dx}_{= \frac{\pi}{2} a_k} \end{aligned}$$

Auflösen nach a_k $\quad \rightsquigarrow$

$$a_k = -\frac{2((-1)^k + 1)}{\pi(k^2 - 1)}$$

(gilt auch für a_0)
$a_k = 0$ für k ungerade, $c_{\pm k} = a_k/2$ $\quad \rightsquigarrow$

$$f(x) \sim -\frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4k^2 - 1} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos(2kx)$$

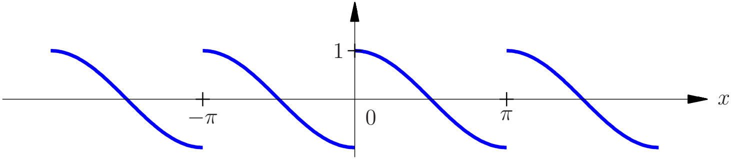


Fouier-Reihe der Ableitung

$$f'(x) = \operatorname{sign}(\sin x)\cos x$$

gliedweise Differentiation $\quad \rightsquigarrow$

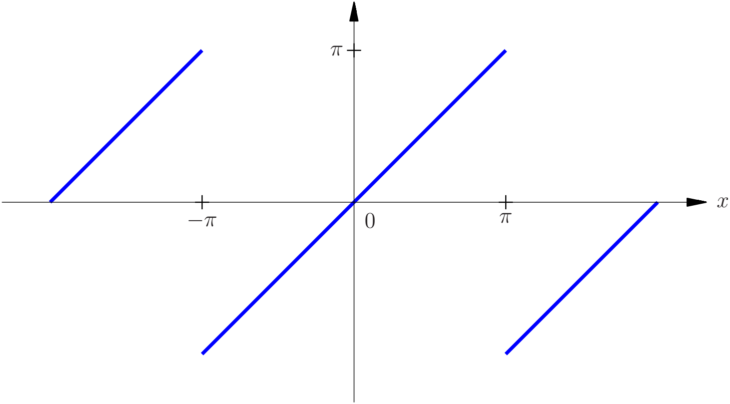
$$f'(x) \sim -\frac{2}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{2\mathrm{i}k}{4k^2-1}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}kx} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4k^2-1}\sin(2kx)$$



Beispiel:

Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi)$$



f ungerade $\quad\rightsquigarrow\quad$ reine Sinus-Reihe, $a_k = 0$ und

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(kx)\, dx$$

partielle Integration $\quad\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kx)}{k}\, dx \\ &= -2 \frac{(-1)^k}{k} + \frac{2}{\pi} \underbrace{\left[\frac{\sin(kx)}{k^2} \right]_0^{\pi}}_{=0} \end{aligned}$$

$c_{\pm k} = \mp \mathrm{i} b_k / 2 \quad\rightsquigarrow$

$$f(x) \sim \mathrm{i} \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin(kx)$$

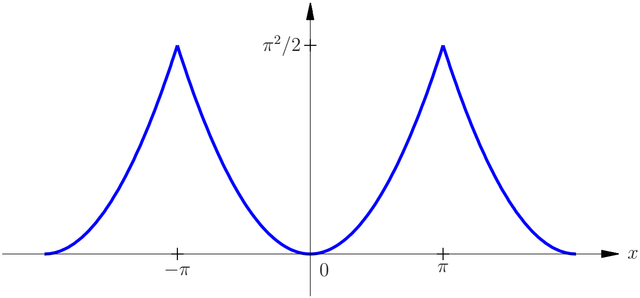
2π-periodische Fortsetzung der Stammfunktion

$$F(x) = x^2/2, \quad x \in [-\pi, \pi)$$

gliedweise Integration, $d_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F = \pi^2/6 \quad \rightsquigarrow \quad$ Fourier-Reihe

$$F(x) \sim d_0 + \sum_{k \neq 0} \frac{(-1)^k}{k^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{\pi^2}{6} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)$$

Einsetzen von $x = \pi \quad \rightsquigarrow \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = (F(\pi) - d_0)/2 = \pi^2/6$



Skalierung von Fourier-Reihen

Die Fourier-Reihe einer h-periodischen Funktion f erhält man durch lineare Transformation auf das Intervall $[-\pi, \pi]$.
Alternativ lassen sich die Fourier-Koeffizienten auch direkt berechnen:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, e^{2\pi \mathrm{i} k x / h}$$

mit

$$c_k = \frac{1}{h} \int_0^h f(t) e^{-2\pi \mathrm{i} k t / h} \, dt \, .$$

Entsprechend erhält man für eine reelle Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi kx/h) + b_k \sin(2\pi kx/h)$$

die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(t) \cos(2\pi kt/h)\, dt, \quad k \geq 0\,, \\ b_k &= \frac{2}{h} \int\limits_0^h f(t) \sin(2\pi kt/h)\, dt, \quad k \geq 1\,. \end{aligned}$$

Beispiel:

reelle Fourier-Reihe der h-periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, a) \\ 0, & x \in [a, h) \end{cases}$$

mit $0 < a < h$

- Kosinus-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{h} \int_0^a dt = \frac{2a}{h}$$

$k \geq 1$

$$a_k = \frac{2}{h} \int_0^a \cos(2\pi kt/h)\, dt = \frac{2}{h} \left[\frac{h \sin(2\pi kt/h)}{2\pi k} \right]_0^a = \frac{\sin(2\pi ka/h)}{\pi k}$$

- Sinus-Koeffizienten:

$$b_k = \frac{2}{h} \int\limits_0^a \sin(2\pi kt/h)\, dt = \frac{2}{h} \left[-\frac{h\cos(2\pi kt/h)}{2\pi k} \right]_0^a = \frac{1-\cos(2\pi ka/h)}{\pi k}$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{a}{h} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ka/h)}{\pi k} \cos(2\pi kx/h) + \frac{1-\cos(2\pi ka/h)}{\pi k} \sin(2\pi kx/h)$$

Fourier-Projektion

Die Fourier-Projektion einer quadratintegrierbaren Funktion f,

$$p_n f = \sum_{|k| \le n} c_k \, e_k, \quad c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, dt\,,$$

ist die beste Approximation zu f in der durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2\pi}$ induzierten Norm $\| \cdot \|_{2\pi}$, d.h.

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} = \min_{q = \sum\limits_{|k| \le n} d_k e_k} \|f - q\|_{2\pi}\,.$$

Darüber hinaus gilt $\|p_n f\|_{2\pi} \le \|f\|_{2\pi}$.

Beweis:

(i) Orthogonalität:

$$\langle f - p_n f, e_j \rangle_{2\pi} = 0, \quad |j| \leq n$$

unmittelbare Folge der Orthogonalität der Basis-Funktionen:

$$\langle p_n f, e_j \rangle_{2\pi} = \sum_{|k| \leq n} c_k \langle e_k, e_j \rangle_{2\pi} = \sum_{|k| \leq n} c_k \delta_{k,j} = c_j, \quad |j| \leq n$$

Subtraktion von $\langle f, e_j \rangle = c_j \quad \Longrightarrow \quad$ Behauptung

(ii) beste Approximation:
Fehler einer anderen Approximation $q = \sum_{|k| \leq n} d_k \, e_k$

$$\begin{aligned}
\|f - q\|_{2\pi}^2 &= \|f - p_n f + p_n f - q\|_{2\pi}^2 \\
&= \|f - p_n f\|_{2\pi}^2 + \langle f - p_n f, r\rangle_{2\pi} + +\langle r, f - p_n f\rangle_{2\pi} + \|r\|_{2\pi}^2
\end{aligned}$$

mit $r = p_n f - q$
r Linearkombination von e_j, $|j| \leq n \quad \Longrightarrow$

$$\langle f - p_n f, r\rangle = 0 = \langle r, f - p_n f\rangle$$

und

$$\|f - q\|_{2\pi}^2 = \|f - p_n f\|_{2\pi}^2 + \|p_n f - q\|_{2\pi}^2$$

(iii) Normabschätzung:
$f - p_n f \perp p_n f$, Satz des Pythagoras $\quad \Longrightarrow$

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \|f - p_n f\|_{2\pi}^2 + \|p_n f\|_{2\pi}^2\,,$$

d.h. $\|p_n f\|_{2\pi} \le \|f\|_{2\pi}$

Dirichlet-Kern

Die Fourier-Projektion

$$p_n f = \sum_{|k|\leq n} \langle f, e_k \rangle_{2\pi} e_k, \quad e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\,,$$

besitzt die Integraldarstellung

$$(p_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} q_n(x-t)\, f(t)\, dt\,,$$

mit

$$q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n+1/2)\xi\right)}{\sin\left(\xi/2\right)}\,,$$

d.h. $p_n f$ lässt sich als Faltung des sogenannten Dirichlet-Kerns q_n mit der Funktion f darstellen.

Beweis:

Definition des Skalarproduktes und der Projektion $\rightsquigarrow$

$$p_n f(x) = \sum_{|k|\le n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,dt\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\sum_{|k|\le n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-t)}}_{q_n(x-t)} f(t)\,dt$$

setze $\xi = x - t$ und benutze

$$u^m + u^{m+1} + \cdots + u^n = \frac{u^{n+1} - u^m}{u - 1}, \quad u \neq 1$$

$\rightsquigarrow$

$$q_n(\xi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\xi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1/2)\xi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1/2)\xi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi/2}}$$

Formel von Euler-Moivre, $\sin t = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})/(2\mathrm{i})$ $\rightsquigarrow$

$$q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n+1/2)\xi\right)}{\sin(\xi/2)}$$

Konvergenz im Mittel bei Fourier-Reihen

Für eine quadratintegrierbare Funktion f konvergiert die Fourier-Reihe

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e_k, \quad e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad c_k = \langle f, e_k\rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\, dt\,,$$

in der Norm $\|\cdot\|_{2\pi}$, d.h. für die Partialsummen gilt

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - (p_n f)(x)|^2\, dx \to 0$$

für $n \to \infty$.

Beweis:

(i) Analyse der Konvergenz für glatte 2π-periodische Funktionen g:
Darstellung der Fourier-Projektion mit dem Dirichlet-Kern:

$$(p_n g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} q_n(x-t) g(t)\, dt, \quad q_n(\xi) = \frac{\sin\left((n+1/2)\xi\right)}{\sin(\xi/2)}$$

$$\xi = x - t,\ \int_{-\pi}^{\pi} q_n = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 + \sum_{1\le|k|\le n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\xi}\, d\xi = 2\pi \quad \rightsquigarrow$$

$$g(x) - (p_n g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin((n+1/2)\xi)\, \underbrace{\frac{g(x)-g(x-\xi)}{\sin(\xi/2)}}_{=h(x,\xi)}\, d\xi$$

g zweimal stetig differenzierbar $\stackrel{\text{l'Hospital}}{\longrightarrow}$ h mindestens einmal stetig differenzierbar

$$
\begin{aligned}
&|g(x) - (p_n g)(x)| \\
&\quad \underset{\text{part. Int.}}{=} \Bigg| \left[-\frac{\cos((n+1/2)\xi)}{2\pi(n+1/2)} h(x,\xi) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+1/2)\xi)}{n+1/2} h_\xi(x \\
&\quad \le \frac{1}{\pi n} \max_{x,\xi} |h(x,\xi)| + \frac{1}{n} \max_{x,\xi} |h_\xi(x,\xi)|
\end{aligned}
$$

$\to 0$ für $n \to \infty$

(ii) Konvergenz für beliebiges periodisches quadratintegrierbares f:
$\forall f\ \exists$ Folge glatter approximierender periodischer Funktionen g_m, d.h.

$$\|f - g_m\|_{2\pi} \to 0, \quad m \to \infty$$

Dreiecksungleichung $\quad \rightsquigarrow \quad$ Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|f - p_n f\|_{2\pi} &= \|(f - g_m) + (g_m - p_n g_m) + (p_n(g_m - f))\|_{2\pi} \\ &\leq \|f - g_m\|_{2\pi} + \|g_m - p_n g_m\|_{2\pi} + \|p_n(g_m - f)\|_{2\pi} \end{aligned}$$

wähle, für gegebenes $\varepsilon > 0$, m so, dass

$$\|f - g_m\|_{2\pi} \leq \varepsilon/3$$

Beschränktheit der Fourier-Projektion $\quad \Longrightarrow$

$$\|p_n(g_m - f)\|_{2\pi} \leq \|g_m - f\|_{2\pi} \leq \varepsilon/3$$

Konvergenz der Fourier-Projektion für glatte Funktionen $\quad \Longrightarrow$

$$\exists n_\varepsilon : \quad \|g_m - p_n g_m\|_{2\pi} < \varepsilon/3, \quad n > n_\varepsilon$$

Parseval-Identität

Die Norm einer 2π-periodischen quadratintegrierbaren Funktion f lässt sich durch die Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, dt$$

ausdrücken:

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \,.$$

Entsprechend gilt für die Kosinus- und Sinus-Koeffizienten einer reellen Funktion f

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k^2 + b_k^2 \right) \,.$$

Beweis:

Konvergenz der Fourier-Reihe:

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 \to 0, \quad n \to \infty$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{2\pi}^2 &= \lim_{n\to\infty} \|p_n f\|_{2\pi}^2 = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{|k|\le n} c_k e_k, \sum_{|j|\le n} c_j e_j \right\rangle_{2\pi} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{|k|\le n} |c_k|^2
\end{aligned}$$

da $\langle e_k, e_j\rangle_{2\pi} = \delta_{k,j}$

Analoge Argumentation im reellen Fall aufgrund der Orthogonalität der Kosinus- und Sinusfunktionen und der Normierung

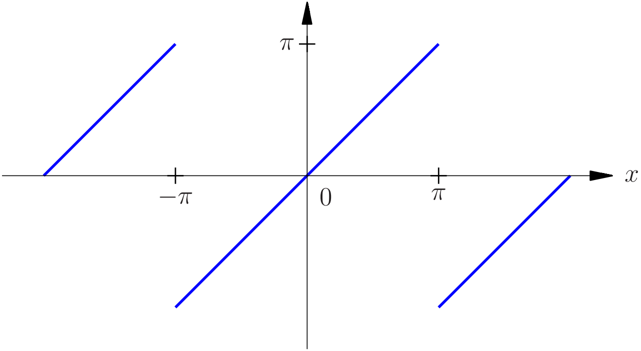
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = \frac{1}{2}$$

Beispiel:

$$f(x) = x, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k \neq 0} \underbrace{\frac{\mathrm{i}(-1)^k}{k}}_{=c_k} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$



Norm

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}$$

Parseval-Identität $\quad\Longrightarrow$

$$\|f\|_{2\pi}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \sum_{k\neq 0} \left|\mathrm{i}\frac{(-1)^k}{k}\right|^2 = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

$\rightsquigarrow$ Identität

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

Konvergenzrate der Fourier-Projektion

Der Fehler der Fourier-Projektion lässt sich für periodische Funktionen mit quadratintegrierbarer k-ter Ableitung durch

$$\|f - p_n f\|_{2\pi} \leq (n+1)^{-k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}$$

abschätzen.
Für $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$ ist die Ungleichung scharf.

Beweis:

Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$$

Fourier-Reihe der k-ten Ableitung

$$f^{(k)}(x) \sim \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j (\mathrm{i}j)^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx}$$

Parseval-Identität

$$\|f^{(k)}\|_{2\pi}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 |j|^{2k}$$

$\Longrightarrow$

$$\|f - p_n f\|_{2\pi}^2 = \sum_{|j|>n} |c_j|^2 \le \sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2 \frac{|j|^{2k}}{(n+1)^{2k}} = (n+1)^{-2k} \|f^{(k)}\|_{2\pi}^2$$

Spezialfall $g(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$:

$$c_{n+1} = 1, c_j = 0 \text{ für } j \neq n+1, \quad g^{(k)}(x) = (\mathrm{i}(n+1))^k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$$

$\rightsquigarrow$ Gleichheit in der Fehlerabschätzung, denn $p_n g = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\|g - p_n g\|_{2\pi}^2 = \|g\|_{2\pi}^2 = \|(\mathrm{i}(n+1))^{-k} g^{(k)}\|_{2\pi}^2 = (n+1)^{-2k} \|g^{(k)}\|_{2\pi}^2$$

Fourier-Matrix

Durch Bilden von Potenzen der Einheitswurzel

$$w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$$

erhält man die so genannte Fourier-Matrix

$$W_n = \begin{pmatrix} w_n^{0\cdot 0} & \cdots & w_n^{0\cdot(n-1)} \\ \vdots & & \vdots \\ w_n^{(n-1)\cdot 0} & \cdots & w_n^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix} .$$

Sie ist nach Normierung ($W_n \to W_n/\sqrt{n}$) unitär, d.h. $W_n^* W_n/n$ ist die Einheitsmatrix.

Beweis:

(i) Orthogonalität der Spalten:
komplexes Skalarprodukt der $(j+1)$-ten und $(k+1)$-ten Spalte

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = \sum_{\ell} w_n^{(j-k)\ell} = \frac{w_n^{(j-k)n} - 1}{w_n^{j-k} - 1}$$

$w_n^n = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\sum_{\ell=0}^{n-1} w_n^{\ell j} \overline{w_n^{\ell k}} = 0$$

(ii) Normierung:
$|w^{\ell k}| = 1 \quad \Longrightarrow \quad$ Norm der Spalten gleich $\sqrt{n}$

Beispiel:

$n = 4,\ w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/4) = \mathrm{i}$

$$W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

unitär nach Division durch 2, d.h.

$$\left(\frac{1}{2} W_4^*\right) \left(\frac{1}{2} W_4\right) = E$$

Symmetrie der Fourier-Matrix $\quad \Longrightarrow$

$$W_4^* = \overline{W_4}^{\mathrm{t}} = \overline{W_4}$$

Diskrete Fourier-Transformation

Die Multiplikation eines n-Vektors c mit der Fourier-Matrix W_n wird als diskrete Fourier-Transformation bezeichnet:

$$f = W_n c \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{1}{n} W_n^* f \, .$$

Definitionsgemäß ist also

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk}, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

$\Leftrightarrow$

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j w_n^{-kj}, \quad k = 0, \ldots, n-1$$

mit $w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)$, wobei die Vektoren c und f von 0 bis $n-1$ indiziert werden.

Die diskrete Fourier-Transformation entspricht der Auswertung des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

an den Punkten $x_j = 2\pi j/n$: $f_j = p(x_j)$, $j = 0, \ldots, n-1$.

Die inverse Transformation kann als Riemann-Summe für die Fourier-Koeffizienten interpretiert werden:

$$\langle f, e_k \rangle_{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\, dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx_j}$$

mit $x_j = 2\pi j/n$.
Diese Approximation ist für glatte periodische Funktionen und $n \gg |k|$ sehr genau.

Beispiel:

diskrete Fourier-Transformation des Vektors $c = (3,\, -2,\, 0,\, 1)^{\mathrm{t}}$:

Multiplikation mit der Fourier-Matrix $\quad \rightsquigarrow$

$$f = W_4 c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-3\mathrm{i} \\ 4 \\ 3+3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

inverse Transformation (Multiplikation mit $W^*/4$):

$$c = \frac{1}{4} W_4^* f = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3-3\mathrm{i} \\ 4 \\ 3+3\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Schnelle Fourier-Transformation

Die diskrete Fourier-Transformation,

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w_n^{jk}\,, \quad j = 0, \ldots, n-1\,,$$

($w_n = \exp(2\pi\mathrm{i}/n)$), kann für $n = 2^\ell$ mit der sogenannten schnellen Fourier-Transformation (FFT, Fast Fourier Transform) mit $2n\ell$-Operationen berechnet werden.

In der rekursiven Version hat der Algorithmus die folgende Form:

$f = \mathrm{FFT}(c)$

$n = \mathrm{length}(c)$

if $n = 1$, $f = c$, **return**

else

$$g = \mathrm{FFT}(c_0, c_2, \ldots, c_{n-2}), \quad h = \mathrm{FFT}(c_1, c_3, \ldots, c_{n-1})$$

$$p = \left(1, w_n, w_n^2, \ldots, w_n^{n/2-1}\right)$$

$$f = (g + p \,.\!* \, h, \, g - p \,.\!* \, h)$$

end

Dabei bezeichnet $.*$ die komponentenweise Multiplikation von Vektoren, d.h. $(a \,.\!* \, b)_j = a_j b_j$.

Die inverse diskrete Fourier-Transformation

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j w_n^{-jk}$$

kann vollkommen analog berechnet werden. Man bezeichnet den entsprechenden Algorithmus mit $c = \mathrm{IFFT}(f)$.

Beweis:

(i) Induktive Herleitung des Algorithmus:

$$f_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k w^{kj} = \sum_{k=0}^{m-1} c_{2k} \tilde{w}^{kj} \; + \; w^j \sum_{k=0}^{m-1} c_{2k+1} \tilde{w}^{kj}, \quad j = 0, \ldots, n-1$$

mit $m = n/2$ und $\tilde{w} = \exp(2\pi \mathrm{i}/m) = w^2$
Summen entsprechen den im Algorithmus rekursiv berechneten Transformierten g und h der Länge m:

$$f_j = g_j + w^j h_j, \quad j = 0, \ldots, m-1$$

$\tilde{w}^m = 1$ und $w^{j+m} = w^j \exp((2\pi \mathrm{i}/n)(n/2)) = -w^j \quad \Longrightarrow$

$$f_{j+m} = g_j - w^j h_j, \quad j = 0, \ldots, m-1\,,$$

d.h. $(f_m, f_{m+1}, ..., f_{n-1})^{\mathrm{t}}$ ist ebenfalls mit Hilfe von g und h berechenbar

(ii) Anzahl $\mathrm{op}(n)$ der Operationen des FFT-Algorithmus:
Addition der zur Berechnung von g, h, p und f benötigten Operationen
$\rightsquigarrow$

$$\mathrm{op}(n) = \mathrm{op}(n/2) + \mathrm{op}(n/2) + (n/2) + 3(n/2) = 2\,\mathrm{op}(n/2) + 2n$$

Iteration der Identität $\quad\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\mathrm{op}(n) &= 2\,(2\,\mathrm{op}(n/4) + 2(n/2)) + 2n = 4\,\mathrm{op}(n/4) + 2n + 2n \\
&= \cdots \\
&= 2^\ell\,\mathrm{op}(1) + \underbrace{2n + \cdots + 2n}_{\ell\text{-mal}}
\end{aligned}$$

$\mathrm{op}(1) = 0 \quad \rightsquigarrow \quad$ Gesamtoperationenzahl $2\ell n$

Beispiel:

diskrete Fourier-Transformation des Vektors

$$c = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$g = \mathrm{FFT}(3, 0)$:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= 3 \\ \tilde{h} &= 0 \\ w_2 &= \exp(2\pi \mathrm{i}/2) = -1\,,\ p = (1) \\ g &= (3 + 1 \cdot 0, 3 - 1 \cdot 0)^{\mathrm{t}} = (3, 3)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

$h = \mathsf{FFT}(-2, 1)$:

$$\begin{aligned} \tilde{g} &= -2 \\ \tilde{h} &= 1 \\ w_2 &= \exp(2\pi\mathrm{i}/2) = -1\,,\ p = (1) \\ h &= (-2 + 1 \cdot 1, -2 - 1 \cdot 1)^{\mathrm{t}} = (-1, -3)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

Addition der rekursiv berechneten diskreten Fourier-Transformierten

$$g = (3, 3)^{\mathrm{t}}, \quad h = (-1, -3)^{\mathrm{t}}$$

$\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} w_4 &= (\exp(2\pi\mathrm{i}/4) = \mathrm{i}\,,\ p = (1, \mathrm{i})^{\mathrm{t}} \\ f &= (g + p. * h, g - p. * h) \\ &= (3 + 1 \cdot (-1), 3 + \mathrm{i} \cdot (-3), 3 - 1 \cdot (-1), 3 - \mathrm{i} \cdot (-3))^{\mathrm{t}} \\ &= (2, 3 - 3\mathrm{i}, 4, 3 + 3\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

Trigonometrische Interpolation

Für $n = 2^\ell$ können die Koeffzienten des trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = c_m \cos(mx) + \sum_{|k|<m} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad m = n/2\,,$$

das die Daten

$$f_j = f(x_j), \quad x_j = 2\pi j/n,\, j = 0, \ldots, n-1\,,$$

interpoliert, mit der inversen schnellen Fourier-Transformation berechnet werden:

$$(c_0, \ldots, c_m, c_{-m+1}, \ldots, c_{-1}) = \mathrm{IFFT}(f)\,.$$

Beweis:

zusätzlicher Kosinus-Term $\rightsquigarrow$ gerade Anzahl der Daten
(notwendig für die schnelle Fourier-Transformation)
definiere

$$(c_0, \ldots, c_m, c_{-m+1}, \ldots, c_{-1}) = \tilde{c} = \mathrm{IFFT}(f) = \frac{1}{n} W_n^* f$$

mit der Fourier-Matrix W_n
(Indizierung von $\tilde{c}$ und f von 0 bis $n-1$)
$W_n/\sqrt{n}$ unitär bzw. Definition der inversen diskreten Fourier-Transformation $\implies$

$$f = W_n \tilde{c} \quad \Leftrightarrow \quad f_j = \tilde{p}(x_j) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_j} ,$$

d.h. $\tilde{p}$ erfüllt die Interpolationsbedingungen ersetze Terme bei $\tilde{p}$, ohne Verletzung der Interpolationsbedingungen

- $k = m$:

$$e^{imx_j} = (-1)^j = \cos(mx_j)\,,$$

  da $mx_j = (n/2)(2\pi j/n) = \pi j$ und $e^{i\pi} = -1$
- $k = m+1, \ldots, n-1$:
  $\tilde{c}_k = c_{k-n}$ und

$$e^{ikx_j} = e^{i(k-n)x_j}\,,$$

  da $-nx_j = -2\pi j$ und $e^{2\pi i} = 1$

$\Longrightarrow$

$$\tilde{p}(x_j) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k e^{ikx_j} + c_m \cos(mx_j) + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n-1} c_{k-n} e^{i(k-n)x_j}}_{\sum_{k=-m+1}^{-1} c_k e^{ikx_j}}$$

Beispiel:

Interpolation der Daten

$$f = (0.2, -6, -0.2, 10, 0.2, -6, -0.2, 10)^{\mathrm{t}}$$

an den Stellen $x_j = 2\pi j/8$, $j = 0, \ldots, 7$, durch ein trigonometrisches Polynom

inverse diskrete Fourier-Transformation $\quad \rightsquigarrow$

$$\tilde{c} = \mathrm{IFFT}(f) = (1, 0, 0.1 + 4\mathrm{i}, 0, -1, 0, 0.1 - 4\mathrm{i}, 0)^{\mathrm{t}}$$

Umindizierung ($\tilde{c}_k = c_{k-8}, k = 5, 6, 7$) $\quad \rightsquigarrow$

$$c = (c_{-3}, \ldots, c_4)^{\mathrm{t}} = (0, 0.1 - 4\mathrm{i}, 0, 1, 0, 0.1 + 4\mathrm{i}, 0, -1)^{\mathrm{t}}$$

interpolierendes trigonometrisches Polynom

$$p(x) = (0.1 - 4\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + 1 + (0.1 + 4\mathrm{i})e^{2\mathrm{i}x} - \cos(4x)$$

Daten f reell $\quad \Longrightarrow \quad$ p reell

$$(0.1 - 4\mathrm{i})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x} + (0.1 + 4\mathrm{i})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x} = 0.2\cos(2x) - 8\sin(2x)$$

Fourier-Filter:

Die trigonometrische Interpolation in Verbindung mit der diskreten Fourier-Transformation kann zum Ausblenden hochfrequenter Störungen in Signalen verwendet werden.

interpoliere die Daten

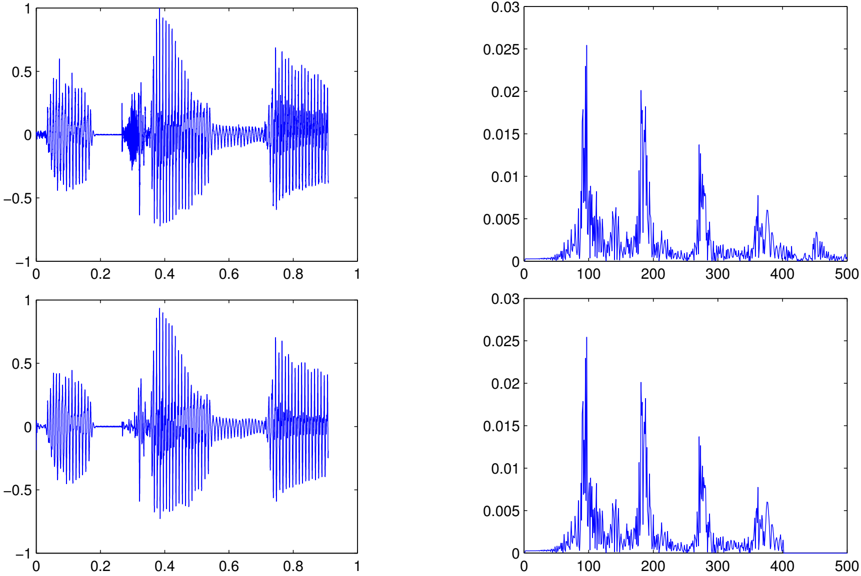
$$f_j \approx f(x_j), \quad x_j = \frac{2\pi j}{n}, \quad 0 \le j < n = 2^\ell\,,$$

mit einem trigonometrischen Polynom

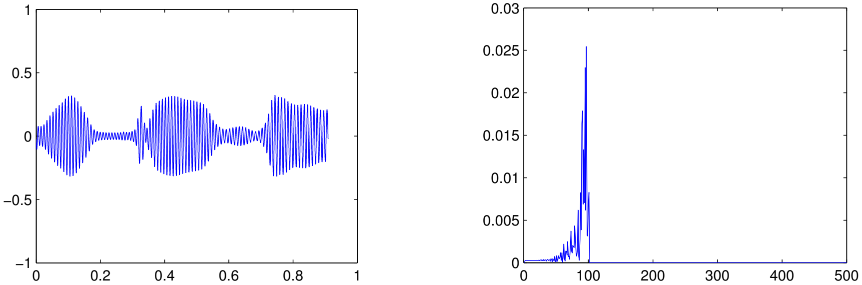
$$p(x) = c_m \cos(mx) + \sum_{|k|<m} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \quad m = n/2$$

Tiefpass mit Bandbreite M:
setze alle Koeffizienten c_k mit $|k| > M$ null
$\rightsquigarrow$ Unterdrückung von Störungen für hinreichend kleines M

Sprachsignal $f(x)$ 500 der 40000 Amplituden $|\mathrm{Re}(c_k)|$



Glättungseffekt für die Bandbreite $M = 400$



Glättungseffekt für die Bandbreite $M = 100$

kleine Bandbreite $\quad\rightsquigarrow\quad$ unerwünschter Genauigkeitsverlust

Bei der Implementierung ist zu beachten, dass die inverse diskrete Fourier-Transformation den permutierten Koeffizientenvektor $\tilde{c}$ berechnet:

$$(\tilde{c}_0, \ldots, \tilde{c}_{n-1}) = (c_0, \ldots, c_m, c_{-m+1}, \ldots, c_{-1})$$

Programmsegment für einen Fourier-Filter:

IFFT: $f_j \to \tilde{c}_k$
$c_{M+1} = \tilde{c}_{M+1}, \ldots, \tilde{c}_{n-1-M} = c_{-M-1}$ auf null setzen
FFT: $\tilde{c}_k \to p(x_j)$

Hochpass:
Nullsetzen der unteren Koeffizienten

Zyklische Gleichungssysteme

Eine zyklische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & & a_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte

$$\lambda_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_k w_n^{-kj}, \quad w_n = \exp(2\pi \mathrm{i}/n)\,,$$

und kann durch die Fourier-Matrix, deren Spalten Eigenvektoren von A sind, diagonalisiert werden:

$$\tfrac{1}{n} W_n^* A W_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \quad \lambda = W_n^* a\,.$$

Zyklische Gleichungssystems $Ax = b$ lassen sich somit mit Hilfe der diskreten Fourier-Transformation lösen:

$$x = W_n \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^{-1}(W_n^* b/n)\,.$$

Für $n = 2^\ell$ ist die schnelle Fourier-Transformation anwendbar, und man erhält den folgenden Lösungsalgorithmus:

$$\begin{aligned}
&c = \mathrm{IFFT}(b)\\
&\lambda = n\ \mathrm{IFFT}(a)\\
&y_j = c_j/\lambda_j\,, \quad j = 0, \ldots, n-1\\
&x = \mathrm{FFT}(y)\,.
\end{aligned}$$

Beweis:

(i) Eigenwerte und -vektoren:
Eintrag $(j+1,\ell+1)$ von AW_n

$$(AW_n)_{j+1,\ell+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k \bmod n}\, w_n^{k\ell}$$

Substitution $k = j - k'$ $\rightsquigarrow$

$$\sum_{k'=j-n+1}^{j} a_{k' \bmod n}\, w_n^{(j-k')\ell}\,.$$

ersetze $k' = j-n+1,\ldots,-1$ durch $j+1,\ldots,n-1$
$\rightsquigarrow$ keine Änderung der Summanden da $w_n^{-k'} = w_n^{-k'+n}$ $\rightsquigarrow$

$$\left(\sum_{k'=0}^{n-1} a_{k'}\, w_n^{-k'\ell}\right) w_n^{j\ell} = \lambda_\ell\, w_n^{j\ell}$$

$\rightsquigarrow$ $(\ell+1)$-ste Spalte des Produkts ist λ_ℓ-faches $(\ell+1)$-ten Spalte der Fourier-Matrix, d.h. $AW_n = W_n \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$

(ii) Zyklisches Gleichungssystem:
Multiplikation des Gleichungssystems $Ax = b$ mit W_n^*/n und Setzen von $x = W_n y \quad \leadsto$

$$\underbrace{\frac{1}{n} W_n^* A W_n}_{\operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}\, y = \underbrace{\frac{1}{n} W_n^* b}_{c}$$

Lösung $y_j = c_j/\lambda_j$

Beispiel:

zyklisches Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -12 & -4 & 8 & 4 \\ 4 & -12 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & -12 & -4 \\ -4 & 8 & 4 & -12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$n = 4,\ a = (-12, 4, 8, -4)^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} c &= \mathrm{IFFT}(b) = (0, 3 + 7\mathrm{i}, 6, 3 - 7\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \\ \lambda &= 4\ \mathrm{IFFT}(a) = (-4, -20 - 8\mathrm{i}, -4, -20 + 8\mathrm{i})^{\mathrm{t}} \\ y &= c\,./\,\lambda = \left(0, \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{i}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{t}} \\ x &= \mathrm{FFT}(y) = (-2, 2, -1, 1)^{\mathrm{t}} \end{aligned}$$

Fourier-Transformation

Existiert zu einer Funktion f das Parameterintegral

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\, dx$$

für alle $y \in \mathbb{R}$, so heißt f Fourier-transformierbar und die Funktion $\hat{f}$ Fourier-Transformierte von f.

Man schreibt

$$\hat{f} = \mathcal{F}f\,, \quad \text{bzw.} \quad f(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y)\,.$$

Entsprechend ist die inverse Fourier-Transformation $\mathcal{F}^{-1}$ durch

$$\hat{f}(y) \quad \overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longmapsto} \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}yx} \, dy \,,$$

definiert und es gilt

$$f = \mathcal{F}^{-1} \mathcal{F} f$$

für absolut integrierbare, stetig differenzierbare Funktionen f.
Die Fourier-Transformation und die inverse Fourier-Transformation sind linear. Sie unterscheiden sich nur unwesentlich. Es ist

$$\mathcal{F} \bar{f} = 2\pi \overline{\mathcal{F}^{-1} f} \,.$$

Beweis:

Idee:
Fourier-Transformation als Grenzfall der Fourier-Reihe, d.h. eine kontinuierliche Entwicklung nach Exponentialfunktionen $e_k(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$
Annahme: $f = 0$ außerhalb von $[-h, h]$
Fourier-Reihe für $x \in [-h, h]$, Definition der Fourier-Transformation $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(t) \overline{e_k(t\pi/h)}\, dt \right] e_k(x\pi/h) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{h} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k\pi/h) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\pi/h)x} \end{aligned}$$

Riemann-Summe der inversen Fourier-Transformation
konvergent bei hinreichend glattem $\hat{f}$ für $\Delta y = \pi/h \to 0$

Beispiel:

Fourier-Transformation der Impuls-Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition, Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \hat{\chi}(y) &= \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\, dx = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}}{-\mathrm{i}y}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y/2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}y/2}}{-\mathrm{i}y} \\ &= \frac{\sin(y/2)}{y/2} = \operatorname{sinc}(y/2) \end{aligned}$$

Beispiel:

Fourier-Transformation der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$$

Formel von Euler-Moivre $\quad \Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xy} = \cos(xy) - \mathrm{i}\sin(xy)$
f gerade $\quad \Longrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(xy)\,dx = 0$ und

$$\begin{aligned}
\hat{f}(y) &= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\cos(yx)\,dx \underset{\text{part. Int.}}{=} 0 + 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\frac{\sin(yx)}{y}\,dx \\
&\underset{\text{part. Int.}}{=} 2\left[\mathrm{e}^{-x}\left(-\frac{\cos(yx)}{y^2}\right)\right]_0^\infty - 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\frac{\cos(yx)}{y^2}\,dx \\
&= \frac{2}{y^2} - \frac{\hat{f}(y)}{y^2}
\end{aligned}$$

Umformung $\quad \rightsquigarrow \quad \hat{f}(y) = 2/(1+y^2)$

Beispiel:

Die Gauß-Funktion ist eine Eigenfunktion der Fourier-Transformation:

$$f(x) = \exp(-x^2/2) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\exp(-y^2/2)\,.$$

Definition $\rightsquigarrow$

$$\hat{f}(y) = \exp(-y^2/2)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2/2 - \mathrm{i}yx + y^2/2)\,dx$$

setze

$$-z^2/2 = -(x+\mathrm{i}y)^2/2\,,\ dz = dx$$

Verschiebung des Integrationswegs (Komplexe Analysis),
$z \in \mathbb{R} + \mathrm{i}y \to z \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{f}(y) = f(y)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2/2)\,dz = f(y)\sqrt{2\pi}$$

Differentiation bei Fourier-Transformation

Bei der Fourier-Transformation entspricht die Ableitung einer Multiplikation mit der transformierten Variablen und umgekehrt:

$$\begin{aligned} f'(x) &\quad \xmapsto{\mathcal{F}} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y) \\ xf(x) &\quad \xmapsto{\mathcal{F}} \quad \mathrm{i}\hat{f}\,'(y)\,. \end{aligned}$$

Beweis:

betrachte hinreichend schnell abfallende Funktionen

$\rightsquigarrow$ keine Randterme bei partieller Integration

(i) Differentiation von f:

$$\widehat{f'}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-iyx}\, dx \underset{\text{part. Int.}}{=} 0 - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \underbrace{\frac{d}{dx} e^{-iyx}}_{-iye^{-iyx}}\, dx = iy\hat{f}(y)$$

(ii) Differentiation von $\hat{f}$:

$$i\hat{f}'(y) = i \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{dy} e^{-iyx}\, dx = i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix) e^{-iyx}\, dx = \hat{g}(y)$$

mit $g(x) = xf(x)$

Abschwächung der Voraussetzungen mit Hilfsmitteln der Funktionalanalysis

Beispiel:

Fourier-Transformation der Gauß-Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-y^2/2}$$

$$f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x^2/2} = -xf(x)$$

Transformationsregeln $\implies$

$$\begin{aligned} f'(x) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y) \\ -xf(x) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad -\mathrm{i}\hat{f}'(y) \end{aligned}$$

identisches Resultat:

$$-\mathrm{i}\hat{f}'(y) = -\mathrm{i}\sqrt{2\pi}(-y)\,\mathrm{e}^{-y^2/2} = \mathrm{i}y\hat{f}(y)$$

mehrfache Anwendung der Transformationsregeln $\rightsquigarrow$
Fourier-Transformation von Funktionen der Form $p(x)\exp(-x^2/2)$ mit beliebigen Polynomen p

Beispiel:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}, \quad \hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$$

Anwendung der Transformationsregeln:

$$\begin{aligned} f'(x) = -\operatorname{sign}(x)\mathrm{e}^{-|x|} \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}y\hat{f}(y) = \frac{2\mathrm{i}y}{1+y^2} \\ x\mathrm{e}^{-|x|} \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \mathrm{i}\hat{f}\,'(y) = -\frac{4\mathrm{i}y}{(1+y^2)^2} \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ explizite Fourier-Transformation von Funktionen der Form $p(x)\exp(-|x|)$ mit beliebigen Polynomen p

Verschiebung bei Fourier-Transformation

Eine Verschiebung der Variablen entspricht nach Fourier-Transformation bzw. Rücktransformation einer Multiplikation mit einer Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f(x-a) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y) \\ \exp(\mathrm{i}ax)f(x) \quad &\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y-a)\,. \end{aligned}$$

Beweis:

(i) Verschiebung:
$g(x) = f(x-a)$, $\tilde{x} = x - a \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tilde{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(\tilde{x}+a)}\,d\tilde{x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ya}\hat{f}(y)$$

(i) Multiplikation mit Exponentialfunktionen:
$h(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x) \quad \rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} \hat{h}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y-a)x}\,dx \\ &= \hat{f}(y-a) \end{aligned}$$

Beispiel:

Impuls-Funktion

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad \hat{\chi}(y) = \operatorname{sinc}(y/2) = \frac{\sin(y/2)}{y/2}$$

Fourier-Transformation von $\chi(x-j)$:

$$e^{-ijy} \operatorname{sinc}(y/2)$$

Fourier-Transformation von $\exp(2\pi i j x)\chi(x)$

$$\hat{\chi}(y - 2\pi j) = \frac{\sin(y/2 - \pi j)}{y/2 - \pi j} = \frac{(-1)^j \sin(y/2)}{y/2 - \pi j}$$

$\rightsquigarrow$ Fourier-Transformation eines trigonometrischen Polynoms

$$p(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}jx}$$

eingeschränkt auf $[-1/2, 1/2]$

$$(p\chi)(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \sin(y/2)\sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{c_j(-1)^j}{y/2-\pi j}$$

Skalierung bei Fourier-Transformation

Für $a \neq 0$ gilt

$$f(ax) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{f}(y/a)/|a|\,.$$

Beweis:

$g(x) = f(ax)$, $\tilde{x} = ax$, $d\tilde{x} = a\,dx \quad \rightsquigarrow$

$$\hat{g}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(ax)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_{-s\infty}^{s\infty} f(\tilde{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\tilde{x}y/a}\,d\tilde{x} = \frac{1}{|a|}\hat{f}(y/a)$$

mit $s = \operatorname{sign}(a)$
Umkehrung der Integrationsgrenzen für $a < 0$ $(s = -1)$

$$\int_{\infty}^{-\infty} \ldots\, d\tilde{x} = -\int_{-\infty}^{\infty} \ldots\, d\tilde{x}$$

Beispiel:

Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a(x-b)^2}$$

verwende

$$g(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2} \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{g}(y) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-y^2/2}$$

Skalierung von $g(x)$ mit $\sqrt{2a}$, d.h. $h(x) = g(\sqrt{2a}x)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$h(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}, \quad \hat{h}(y) = \sqrt{\pi/a}\,\mathrm{e}^{-y^2/(4a)}$$

Verschiebung um b nach rechts, d.h. $f(x) = h(x-b)$ $\quad\rightsquigarrow$

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\pi/a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}by}\,\mathrm{e}^{-y^2/(4a)}$$

Faltung und Fourier-Transformation

Die Faltung zweier Funktionen,

$$(f \star g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt\,,$$

wird durch die Fourier-Transformation in ein Produkt überführt:

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}\,.$$

Beweis:

formales Argument:
linke Seite

$$\widehat{f \star g}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx} \, dt \, dx$$

schreibe $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y(x-t)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}$ und substituiere $z = x - t$, $dz = dx$
$\rightsquigarrow$ Integral in Produktform:

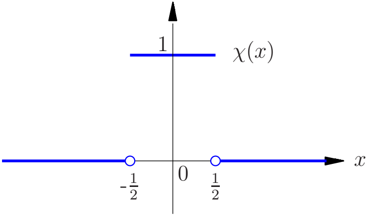
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yz} \, dz \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt} \, dt$$

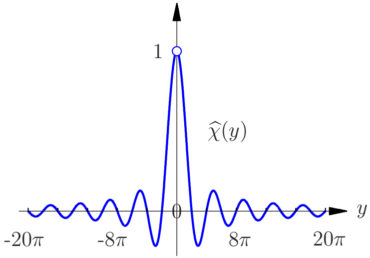
Übereinstimmung mit der rechten Seite

Beispiel:

Impuls-Funktion

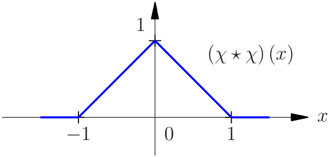
$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \hat{\chi}(y) = \frac{\sin(y/2)}{y/2} = \operatorname{sinc}(y/2)$$





Faltung von χ mit sich selbst

$$(\chi\star\chi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-t)\chi(t)\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} \chi(x-t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$



Fourier-Transformation der sogenannten Hutfunktion $\chi \star \chi$:

$$\widehat{\chi \star \chi}(y) = \frac{\sin^2(y/2)}{y^2/4} = \operatorname{sinc}^2(y/2)$$

aufgrund der Faltungsformel

Regeln für die Fourier-Transformation

$\varphi(x)$	$\hat{\varphi}(y)$
$af(x) + bg(x)$	$a\hat{f}(y) + b\hat{g}(y)$
$\hat{f}(-x)$	$2\pi f(y)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\hat{f}(-y)}$
$f(ax)$	$\hat{f}(y/a)/\|a\|, \quad a \neq 0$
$f(x-a)$	$\exp(-\mathrm{i}ay)\hat{f}(y)$
$\exp(\mathrm{i}ax)f(x)$	$\hat{f}(y-a)$
$f'(x)$	$\mathrm{i}y\hat{f}(y)$
$xf(x)$	$\mathrm{i}\hat{f}\,'(y)$
$(f \star g)(x)$	$\hat{f}(y)\hat{g}(y)$

Quadratintegrierbare Funktionen

Für ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet $L^2(D)$ den Raum der Funktionen $f:\ D \to \mathbb{C}$ mit

$$\int\limits_D |f(x)|^2\, dx < \infty$$

und der durch das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_D f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

induzierten Norm $\|\cdot\|$.
Alternativ kann $L^2(D)$ auch als Abschluss der glatten Funktionen definiert werden, d.h. jede quadratintegrierbare Funktion lässt sich durch eine Folge unendlich oft differenzierbarer Funktionen f_n approximieren:

$$\|f - f_n\| \to 0, \quad n \to \infty\,.$$

Beispiel:

radiale Funktion

$$f(x) = |x|^s$$

(i) $\quad D = \{x \in \mathbb{R}^n : \; r = |x| < 1\}$ (n-dimensionale Einheitskugel):

$$\int_D |f(x)|^2 \, dx \underset{\text{Kugelkoord.}}{=} c \int_0^1 r^{2s} r^{n-1} \, dr$$

$\Longrightarrow \quad f$ quadratintegrierbar für $2s > -n$ mit Wert $c/(2s+n)$

(ii) $\quad \tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \; r = |x| > 1\}$ (Komplement der Einheitskugel):

$$\|f\|_2^2 = \int_{\tilde{D}} |x|^{2s} \, dx = c \int_1^\infty r^{2s} r^{n-1} \, dr$$

$\Longrightarrow \quad f$ quadratintegrierbar für $2s < -n$ mit Wert $-c/(2s+n)$

Satz von Plancherel

Bis auf einen Normierungsfaktor lässt die Fourier-Transformation das Skalarprodukt und damit auch die Norm auf $L^2(\mathbb{R})$ invariant:

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle, \quad \sqrt{2\pi}\, \|f\| = \|\hat{f}\| \,.$$

Aufgrund dieser Eigenschaft kann die Fourier-Transformation auf $L^2(\mathbb{R})$ durch einen Grenzprozess definiert werden. Für eine quadratintegrierbare Funktion f wählt man eine approximierende Folge glatter Funktionen f_n mit kompaktem Träger ($\|f - f_n\| \to 0$) und definiert

$$\hat{f} = \lim_{n \to \infty} \hat{f}_n \,.$$

Beweis:

formale Begründung:

wähle f als die inverse Fourier-Transformation einer Funktion h $\quad\rightsquigarrow$

$$2\pi\,\langle f, g\rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\,dy\,dx$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge $\quad\rightsquigarrow$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yx}\,dx}_{=\overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}yx}\,dx}}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\overline{\hat{g}(y)}\,dy = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Beispiel:

Gauß-Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}, \quad \hat{f}(y) = \sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-y^2/2}$$

Illustation der Identität von Plancherel:

$$\|\hat{f}\|^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle = \langle \sqrt{2\pi} f, \sqrt{2\pi} f \rangle = 2\pi \, \|f\|^2$$

Wert der Norm

$$\|f\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \overline{\mathrm{e}^{-x^2/2}} \, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

Beispiel:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}, \quad \hat{f}(y) = \frac{2}{1+y^2}$$

Illustration der Identität von Plancherel:

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= 2\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,dx = \left[-\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^\infty = 1 \\
\|\hat{f}\|^2 &= \int_{-\infty}^\infty \frac{4}{(1+y^2)^2}\,dy = \left[\frac{2y}{1+y^2} + 2\arctan(y)\right]_{-\infty}^\infty = 2\pi
\end{aligned}$$

Berechnung des Integrals mit Partialbruchzerlegung
Kontrolle:

$$\frac{d}{dy}[\ldots] = \frac{2(1+y^2) - 4y^2}{(1+y^2)^2} + \frac{2}{1+y^2} = \frac{4}{(1+y^2)^2} \quad \checkmark$$

Beispiel:

Berechnung des Integrals

$$I = \int_0^\infty \frac{\cos(y)\sin(y/2)}{4y + 9y^3}\, dy$$

Formel von Euler-Moivre $\quad \rightsquigarrow$

$$\int_0^\infty \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \underbrace{\frac{\sin(y/2)}{4y\left(1 + \left(\frac{3}{2}\,y\right)^2\right)}}_{\text{gerade Funktion}}\, dy = \frac{1}{32}\int_{-\infty}^\infty \frac{2}{1 + \left(\frac{3}{2}y\right)^2}\,\frac{e^{iy}\sin\left(y/2\right)}{(y/2)}\, dy$$

setze

$$\begin{aligned}\hat{f}(y) &= \frac{2}{1+y^2}, \quad f(x) = e^{-|x|} \\ \hat{g}(y) &= \operatorname{sinc}(y/2), \quad g(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le 1/2 \\ 0, & |x| > 1/2 \end{cases}\end{aligned}$$

Satz von Plancherel, Skalierungsformel $\quad\Longrightarrow$

$$I = \frac{1}{32} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\frac{3}{2}y\right) \overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}y}\hat{g}(y)}\,dy = \frac{2\pi}{32} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{3} f\left(\frac{2}{3}x\right) \overline{g(x-1)}\,dx$$

Einsetzen mit $g(\cdot - 1)$ der charakteristischen Funktion von $[1/2, 3/2]$ (Verschiebung um 1 nach rechts) $\quad\rightsquigarrow$

$$I = \frac{\pi}{24} \int\limits_{1/2}^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{2}{3}|x|}\,dx = -\frac{\pi}{16}\left[\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x}\right]_{1/2}^{3/2} = \frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

Rekonstruktionssatz

Hat f Bandbreite h, d.h. ist

$$\hat{f}(y) = 0, \quad |y| > h\,,$$

und ist $\hat{f}$ quadratintegrierbar, dann gilt

$$f(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j\pi/h)\,\mathrm{sinc}(hx - j\pi)$$

mit $\mathrm{sinc}(t) = \sin t/t$.
Funktionen mit endlicher Bandbreite können also aus ihren Werten auf einem genügend feinen Gitter rekonstruiert werden.

Beweis:

(i) $h = \pi$:
Darstellung von $\hat{f}$ als Produkt einer Fourier-Reihe mit der charakteristischen Funktion χ des Intervalls $[-\pi, \pi]$:

$$\hat{f}(y) = \left(\sum_j c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jy} \right) \chi(y), \quad c_j = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}jy} \, dy$$

Bandbreite von f gleich π
$\Longrightarrow$ Übereinstimmung von c_j mit der inversen Fourier-Transformation:

$$c_j = f(-j)$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\chi(y)$: Fourier-Transformation von $\operatorname{sinc}(\pi(x+j))$ $\Longrightarrow$

$$f(x) = \left(\left(\mathcal{F}^{-1} \sum_j f(-j) \mathrm{e}^{\mathrm{i}j\cdot} \chi \right) \right)(x) = \sum_j f(-j) \operatorname{sinc}(\pi(x+j))$$

Substitution $j \leftarrow -j$ $\rightsquigarrow$ gewünschte Identität

(ii) $\quad h$ beliebig:
Bandbreite von f gleich $h \quad \Longrightarrow \quad$ Bandbreite von $g(x) = f(x\,\pi/h)$ gleich π, denn

$$\hat{g}(y) = (h/\pi)\hat{f}(y\,h/\pi)$$

Teil (i) $\quad \Longrightarrow$

$$f(x\,\pi/h) = g(x) = \sum_j g(j)\,\mathrm{sinc}(\pi(x-j)), \quad g(j) = f(j\,\pi/h)$$

Substitution $x \leftarrow x\,h/\pi \quad \rightsquigarrow \quad$ allgemeine Rekonstruktionsformel

Details: inverse Fourier-Transformation von $\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\chi(y)$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}xy}\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\,dy &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+j)y}}{\mathrm{i}(x+j)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+j)\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x+j)\pi}}{\mathrm{i}(x+j)} = \frac{\sin(\pi(x+j))}{\pi(x+j)}
\end{aligned}$$

Beispiel:

$$f(x) = \operatorname{sinc}(ax) = \frac{\sin(ax)}{ax}, \quad \hat{f}(y) = \begin{cases} \pi/a, & |y| < a \\ 0, & |y| > a \end{cases}$$

Bandbreite $h = 1$ für $0 < a \leq 1$
Rekonstruktionssatz mit $h = 1 \quad \Longrightarrow$

$$\operatorname{sinc}(ax) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}(aj\pi) \operatorname{sinc}(x - j\pi)$$

(i) $\quad a = 1$:

$$\operatorname{sinc}(j\pi) = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ 0, & j \neq 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ triviale Identität

(ii) $a = 1/2$, $x = \pi/2$:

$$\frac{\sin(\pi/4)}{\pi/4} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \quad = \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(j\pi/2)}{j\pi/2} \, \frac{\sin(\pi/2 - j\pi)}{\pi/2 - j\pi}$$

Summand für $j = 0$: $\operatorname{sinc}(0) \sin(\pi/2)/(\pi/2) = 2/\pi$
Summanden für gerades j null
Summanden für $j = 2k+1$:

$$\frac{\sin(k\pi + \pi/2)\sin(\pi/2 - 2k\pi - \pi)}{(2k+1)(\pi/2)(-4k-1)(\pi/2)} = \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^k(-1)}{(2k+1)(-4k-1)}$$

$\rightsquigarrow$ Wert der Summe

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(4k+1)}$$

Poisson-Summationsformel

Sind f und $\hat{f}$ stetig und quadratintegrierbar, so gilt

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi\ell)\,.$$

Beweis:

formale Argumentation:
Definition der inversen Fourier-Transformation und Umformung $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}} f(j) &= \frac{1}{2\pi}\sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\,dy = \frac{1}{2\pi}\sum_j\sum_\ell \int_{2\pi\ell-\pi}^{2\pi\ell+\pi} \hat{f}(y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\,dy \\
&= \sum_j \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_\ell \hat{f}(y+2\pi\ell)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\,dy
\end{aligned}$$

$[\ldots] = g(y)$: 2π-periodisch
$\Longrightarrow$ $\sum_j f(j)$: Summe s der Fourier-Koeffizienten c_{-j} von g, d.h.

$$s = \sum_j c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jy}\Big|_{y=0} = g(0) = \sum_\ell \hat{f}(2\pi\ell)$$

Beispiel:

Hutfunktion

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ x+1, & -1 \le x < 0 \\ 1-x, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}, \quad \hat{g}(y) = \operatorname{sinc}^2(y/2) = \frac{\sin^2(y/2)}{(y/2)^2}$$

Poisson-Summationsformel mit

$$f(x) = \exp(\mathrm{i}ax)g(x) \quad \stackrel{\mathcal{F}}{\longmapsto} \quad \hat{g}(y-a) = \hat{f}(y)$$

$\Longrightarrow$

$$1 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} g(j)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ja} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(\pi\ell - a/2)}{(\pi\ell - a/2)^2} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{\sin^2(a/2)}{(\ell - a/(2\pi))^2}$$

denn $g(j) = 0$ für $j \neq 0$ und $\sin^2 x$ ist π-periodisch nach Umformung

$$\frac{\pi^2}{\sin^2(a/2)} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\ell - a/(2\pi))^2}$$

$a = \pi \quad \rightsquigarrow$

$$\pi^2 = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\ell - 1/2)^2} = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \frac{4}{(2\ell - 1)^2}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots$$