Tangentialebene

Sei f eine stetig differenzierbare Funktion und $p = (p_1, \ldots, p_n)$ die Koordinaten eines Punktes P auf der durch

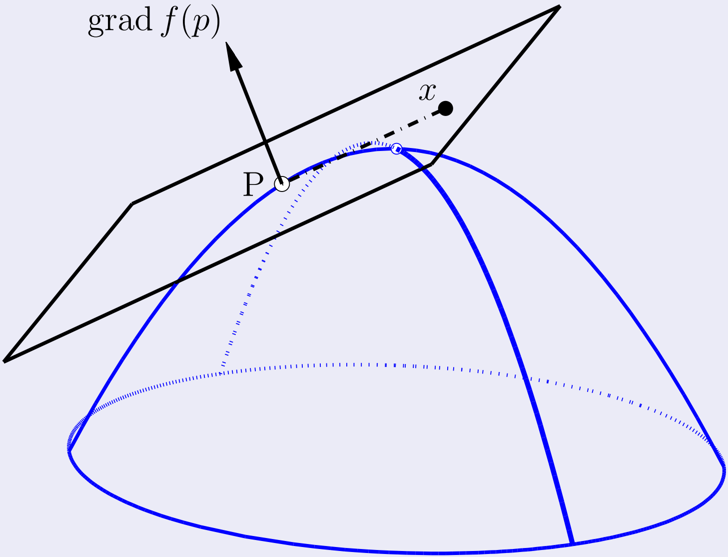
$$f\,(x_1, \ldots, x_n) = c$$

implizit definierten Fläche.

Ist $\operatorname{grad} f(p) \neq 0$, so hat die Tangentialebene im Punkt P die Gleichung

$$E: \quad (\operatorname{grad} f(p))^{\mathrm{t}}\,(x - p) = 0\,.$$

Der Normalenvektor ist also parallel zu $\operatorname{grad} f$.


grad $f(p)$
x
P

Speziell ist für den Graph einer Funktion $x \mapsto y = g\,(x_1\,, \ldots\,, x_{n-1})$

$$E: \quad y - g(q) = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)\,(x_i - q_i)$$

die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(q_i\,, \ldots\,, q_{n-1}\,, g(q))^{\mathrm{t}}$. Die partielle Ableitung $\partial_i g$ entspricht somit der Steigung der Tangentialebene in Richtung der i-ten Koordinatenachse.

Beweis:

(i) Implizite Darstellung einer Fläche durch $f(x_1, \ldots, x_n) = c$:
Definition der totalen Ableitung $f' = (\operatorname{grad}\ f)^{\mathrm{t}} \quad \Longrightarrow$

$$f(x) = f(p) + (\operatorname{grad}\ f)^{\mathrm{t}}(x - p) + o(|x - p|)$$

Vernachlässigung des Terms $o(|x - p|)$, $f(x) = f(p) = c \quad \rightsquigarrow$
Gleichung der Tangentialebene
(ii) Darstellung einer Fläche als Funktionsgraph $y = g\,(x_1, \ldots, x_{n-1})$:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_i g(q)(\Delta x_i) + o(|\Delta x|)$$

mit $\Delta y = y - g(q)$ und $\Delta x = x - q$
Vernachlässigung des Restgliedes $\quad \rightsquigarrow \quad$ Darstellung der Tangentialebene

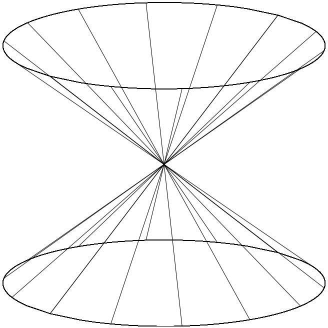
Beispiel:

Kegel

$$K:\ f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

grad $f(x,y,z) = (2x, 2y, -2z)^{\mathrm{t}} \quad \rightsquigarrow \quad$ Tangentialebene im Punkt (x_0, y_0, z_0)

$$E:\ 2x(x - x_0) + 2y(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = 0$$



Tangentialebene im Punkt $P = (3, 4, 5)$

$$E: \ -10z + 8y + 6x = 0$$

$\operatorname{grad} f(p) = (0, 0, 0)$ für $p = (0, 0, 0)$
$\rightsquigarrow$ keine Tangentialebene an der Spitze des Kegels

Beispiel:

Potential eines Dipols mit Ladungen in den Punkten $-P$ und P (mit Koordinaten $\pm p = \pm(p_1, p_2)$)

$$g(x) = |x-p|^{-1} - |x+p|^{-1}\,, \quad x = (x_1, x_2)$$

$\partial_\nu (x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} = (-1/2)(x_1^2 + x_2^2)^{-3/2}(2x_\nu) \quad \rightsquigarrow \quad$ Gradient

$$\operatorname{grad}\, g(x) = \frac{(x+p)}{|x+p|^3} - \frac{(x-p)}{|x-p|^3}$$

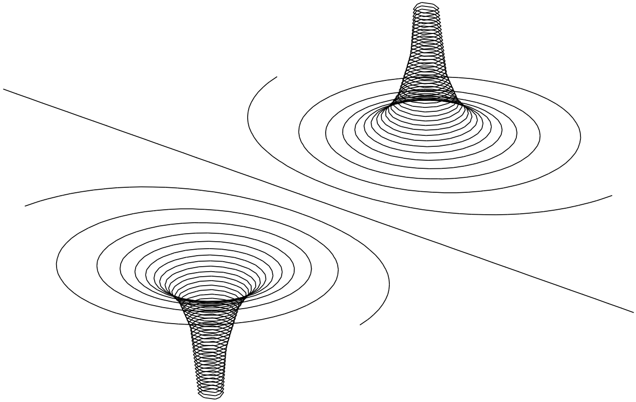
Tangentialebene im Punkt A mit Koordinaten $a = (a_1, a_2)$

$$x_3 = g(a) + (\operatorname{grad} g(a))^{\mathrm{t}}\ (x-a)$$

z.B. für $a = (0,0)$

$$x_3 = 0 + (2p^{\mathrm{r}}/|p|^3)(x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$$

Tangentialebene verläuft durch den Ursprung und enthält die Gerade senkrecht zu P.



keine Tangentialebenen in den Singularitäten P und $-P$

Tangentialebene einer parametrisierten Fläche

Durch eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(s \\ \vdots \\ f_n(s) \end{pmatrix}$$

wird eine $(n-1)$-dimensionale Fläche $S \subset \mathbb{R}^n$ definiert. Sind die partiellen Ableitungen $\partial_k f(s)$ linear unabhängig, so spannen diese Vektoren die Tangentialebene im Punkt $p = f(s)$ auf:

$$E: \; p + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \partial_k f(s), \quad \lambda_k \in \mathbb{R}\,.$$