Rekursive Approximation von Pi

Die halben Umfänge a_n und b_n der um- und einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$-Ecke eines Einheitskreises genügen der Rekursion

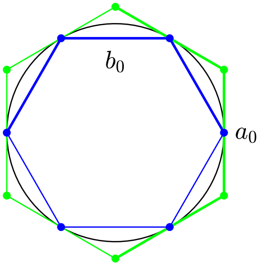
$$a_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}, \quad a_0 = 2\sqrt{3}\,,\; b_0 = 3\,,$$

mit deren Hilfe $\pi = 3.1415926535897932\ldots$ approximiert werden kann. Diese Formeln wurden von Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) im Jahr 1800 gefunden.

Archimedes (287-212 v. Chr.) hat mit Hilfe des 96-Ecks ($n = 4$) und der Abschätzung $\frac{265}{153} < \sqrt{3}$ die Relation

$$3.140845 = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3.142857$$

gewonnen.



Berechnung von Pi

Autor	Jahr		korr. Stellen	Wert
Bibel (1. Könige 7:23)	550	v. Chr.	0	3
Babylonier	2000	v. Chr.	1	$3 + \frac{1}{8}$
Archimedes	250	v. Chr.	3	$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$
Liu Hui	263		5	3.1415
Tsu Ch'ung Chi	480		7	3.141592
Al-Kashi	1429		14	3.1415926535897
Romanus	1593		15	3.14159265358979
Van Ceulen	1596		20	
Van Ceulen	1615		35	
Sharp	1699		71	
Machin	1706		100	
Rutherford	1824		152	
Strassnitzky/Dase	1844		200	

Autor	Jahr	korr. Stellen	Wert
Shanks	1874	527	
Smith/Wrench	1949	1 120	
Reitwiesner u.a.	1949	2 037	
Genuys	1958	10 000	
Shanks/Wrench	1961	100 265	
Guilloud/Filliatre	1966	250 000	
Guilloud/Dichampt	1967	500 000	
Guilloud/Bouyer	1973	1 001 250	
Kanada/Yoshino/Tamura	1982	16 777 206	
Kanada/Tamura/Kubo u.a.	1987	134 217 700	
Chudnovskys	1989	1 011 196 691	

Beweis

(i) Startwerte (n=0):

- Einbeschriebenes Sechseck:
  Seitenlänge = Radius (= 1), d.h.

$$b_0 = 3 \cdot 1$$

- Umbeschriebenes Sechseck:
  Radius (= 1) = Höhe der 6 gleichseitigen Dreicke
  $\rightsquigarrow$ Seitenlänge

$$a = 1/\cos 30^\circ = 2/\sqrt{3}$$

und

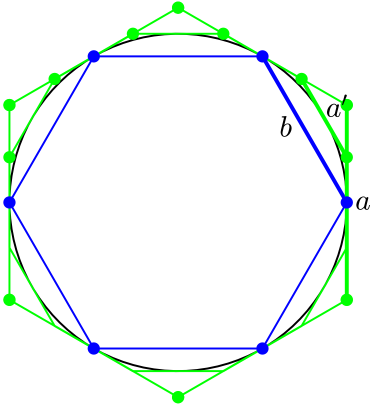
$$a_0 = 3a = 2\sqrt{3}$$

(ii) Strahlensatz, angewandt auf die Seiten a und a' der umbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$- und $(6 \cdot 2^{n+1})$-Ecke und die Seite b des einbeschriebenen $(6 \cdot 2^n)$-Ecks:

$$a' : b = \left(\frac{a}{2} - \frac{a'}{2}\right) : \frac{a}{2}$$

$$\iff \quad a'a = ba - ba'$$

$$\iff \quad a' = \frac{ab}{a+b}$$



(iii) Rekursion:

$a_n = k_n a$, $b_n = k_n b$ mit $k_n = 3 \cdot 2^n \quad \Longrightarrow$

$$a_{n+1} = k_{n+1} a' = 2k_n \cdot \frac{ab}{a+b} = 2\frac{(k_n a)(k_n b)}{k_n a + k_n b} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n}$$

Winkel der $4k_n$ rechtwinkligen Teildreiecke der $(2k_n)$-Ecke: $2\pi/(4k_n)$

$\rightsquigarrow \quad (a/2) : 1 = \tan(\pi/(2k_n))$, $(b/2) : 1 = \sin(\pi/(2k_n))$ und

$$a_n = k_n \cdot 2\tan(\pi/(2k_n)), \quad b_n = k_n \cdot 2\sin(\pi/(2k_n))$$

Umformung (verwendet $\tan t \cos t = \sin t$, $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$) $\quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} b_{n+1}^2 &= (\underbrace{2k_n}_{k_{n+1}})^2 \cdot 4\sin^2(\pi/(4k_n)) \\ &= \underbrace{2k_n \cdot 2\tan(\pi/(4k_n))}_{a_{n+1}}\ \underbrace{\cos(\pi/(4k_n)) \cdot 2k_n \cdot 2\sin(\pi/(4k_n))}_{k_n \cdot 2\sin(\pi/(2k_n)) = b_n} \\ &= a_{n+1} b_n \end{aligned}$$