# Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen

Für die Exponential- und Logarithmusfunktion gelten folgende Regeln:

$$\begin{aligned} a^{s+t} &= a^s\,a^t, & \log_a x + \log_a y &= \log_a(xy),\\ a^{s-t} &= a^s/a^t, & \log_a x - \log_a y &= \log_a(x/y),\\ a^{st} &= (a^s)^t & t\log_a x &= \log_a x^t\,, \end{aligned}$$

mit $s, t \in \mathbb{R}$ und $x, y > 0$.
Darüber hinaus gilt für die Umrechnung zwischen verschiedenen Basen

$$\log_b x = \log_b a\, \log_a x\,.$$

Einige für Umrechnungen wichtige Werte sind in der nebenstehenden Tabelle angegeben. Beispielsweise ist

$$\log x = (\log \mathrm{e})\ln x = 0.4343 \ln x$$

($b = 10$, $a = \mathrm{e}$).

| | 2 | e | 10 |
|---|---|---|---|
| ld | | 1.4427 | 3.3219 |
| ln | 0.6931 | | 2.3026 |
| log | 0.3010 | 0.4343 | |

**Beweis**

(i) Äquivalenz der Regeln:

Logarithmieren der Regeln für die Exponentialfunktionen $\rightsquigarrow$

$$\begin{aligned} s+t &= \log_a(a^s a^t) \\ s-t &= \log_a(a^s/a^t) \\ st &= \log_a((a^s)^t) \end{aligned}$$

Setzen von

$$x = a^s,\, y = a^t \quad \Leftrightarrow \quad \log_a x = s,\, \log_a y = t$$

$\rightsquigarrow$ Formeln für die Logarithmusfunktionen

(ii) Begründung der Regeln für die Exponentialfunktionen:

Funktionalgleichungen $\implies$ erste beide Identitäten

$a^r = \mathrm{e}^{r \ln a}$ (Definition) mit $r = st$ und $r = s$ $\implies$ dritte Identität:

$$a^{st} = \mathrm{e}^{st \ln a} = (\mathrm{e}^{s \ln a})^t = (a^s)^t$$

(iii) Umrechnungsformel:
Anwenden der Potenzfunktion $r \mapsto b^r \quad \leadsto \quad$ äquivalente Identität

$$x = b^{\log_b a \, \log_a x}$$

Vereinfachen der rechten Seite mit Hilfe der Regeln $b^{st} = (b^s)^t$, $c^{\log_c r} = r$ mit $c = b$ und $c = a \quad \leadsto$

$$b^{\log_b a \, \log_a x} = \left(b^{\log_b a}\right)^{\log_a x} = a^{\log_a x} = x \quad \checkmark$$

- Spezialfall $b = 10$, $a = \mathrm{e}$
  $\leadsto \quad$ Regel für die Umrechnung des dezimalen in den natürlichen Logarithmus

## Beispiel

Anwendung der Rechenregeln für Logarithmen

(i) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^s) = s \ln a \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\ln(4x^2) - 2\ln(2) \\
&\quad = \ln(2^2) + \ln(x^2) - 2\ln 2 \\
&\quad = 2\ln 2 + 2\ln x - 2\ln 2 \\
&\quad = 2\ln x
\end{aligned}$$

(ii) $\log_4 a^s = s\log_4 a$, $\operatorname{ld}(a+b) = \operatorname{ld} a + \operatorname{ld} b$, $\log_4 a = (\log_4 2)\operatorname{ld} a \quad \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\log_4(x^2) + \operatorname{ld}(2x) \\
&\quad = 2\log_4 x + \operatorname{ld} 2 + \operatorname{ld} x \\
&\quad = 2(\log_4 2)\ \operatorname{ld} x + \operatorname{ld} 2 + \operatorname{ld} x
\end{aligned}$$

$\log_4 2 = 1/2 \quad \rightsquigarrow$

$$\operatorname{ld} x + \operatorname{ld} 2 + \operatorname{ld} x = \operatorname{ld} 2 + 2\ \operatorname{ld} x = \operatorname{ld}(2x^2)$$