Extremwerttest

Der Typ eines Extremwerts lässt sich mit Hilfe höherer Ableitungen entscheiden.

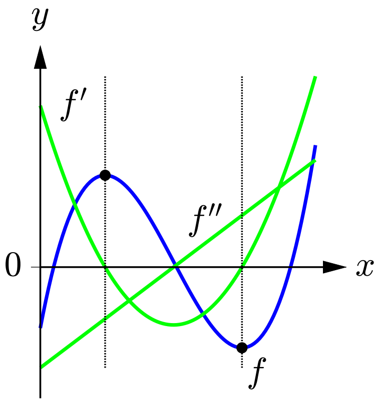
Ist f zweimal stetig differenzierbar und

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) > 0\,,$$

so hat f ein lokales Minimum bei a. Entsprechend ist

$$f'(a) = 0, \quad f''(a) < 0$$

eine hinreichende Bedingung für ein lokales Maximum.



Verschwindet die zweite Ableitung an der Stelle a, so müssen höhere Ableitungen zur Entscheidung herangezogen werden. Gilt

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(a) \neq 0\,,$$

so hat f in a genau dann eine Extremstelle, wenn n gerade ist. In diesem Fall hat f in a ein lokales Minimum bzw. Maximum, wenn $f^{(n)}(a) > 0$ bzw. $f^{(n)}(a) < 0$ ist.

Beweis

$f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad \Longrightarrow$
konstantes Taylor-Polynom vom Grad $n-1$ $(= f(a))$ an der Stelle a
Restglied

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-a)^n$$

mit t zwischen a und x
x nahe bei $a \quad \Longrightarrow$
gleiches Vorzeichen von $f^{(n)}(t)$ und $f^{(n)}(a)$

- n ungerade:
  Vorzeichenwechsel des Restgliedes beim Übergang von $x < a$ zu $x > a$
  $\leadsto$ kein Extremum
- n gerade: $(x-a)^n > 0$ für $x \neq a$

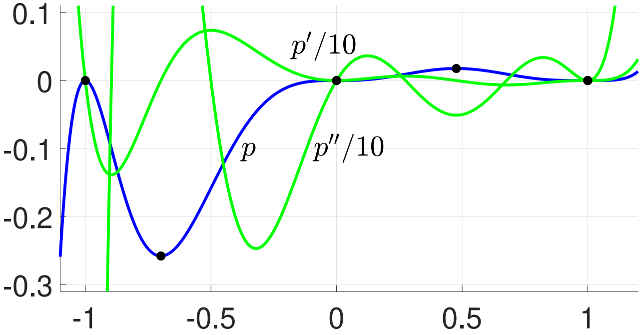
$$\operatorname{sign}(f(x) - f(a)) = \operatorname{sign} f^{(n)}(a)$$

$\leadsto$ lokales Minimum (Maximum) für $f^{(n)}(a) > 0$ $(f^{(n)}(a) < 0)$

Beispiel

Extrema des Polynoms

$$p(x) = (x+1)^2 x^3 (x-1)^4$$



keine globalen Extrema, da

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

(i) Nullstellen der Ableitung bei $x = -1, 0, 1$:

- $p'(-1) = 0$

$$p''(-1) = 2x^3(x-1)^4|_{x=-1} = 2(-1)^3(-2)^4 < 0$$

$\Longrightarrow$ lokales Maximum, Funktionswert 0

- $p'(0) = 0$:

$$p''(0) = 0, \quad p'''(0) \neq 0$$

$\Longrightarrow$ kein Extremwert (ungerade Ordnung der ersten nicht trivialen Ableitung)

- $p'(1) = 0$:

$$p''(1) = p'''(1) = 0, \quad p^{(4)}(1) = 2^2 \cdot 1^3 \cdot 4! > 0$$

$\Longrightarrow$ lokales Minimum (gerade Ordnung der ersten nicht trivialen Ableitung), Funktionswert 0

(ii) Weitere Nullstellen von p':

$$p(-1) = p(0) = p(1) = 0$$

$\implies$ mindestens je eine weitere lokale Extremstelle in $(-1, 0)$ und $(0, 1)$

Grad $p' = 8$, Gesamtvielfachheit der Nullstellen von p' bei -1, 0, 1 gleich $1 + 2 + 3 = 6$

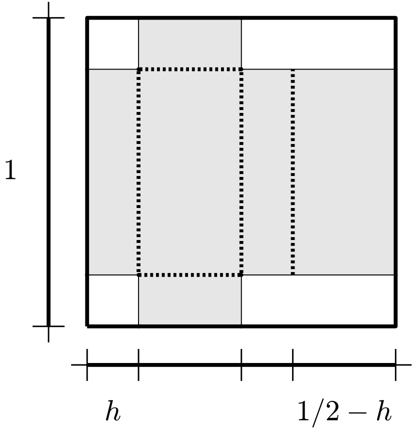
$\implies$ Ableitung an genau zwei Stellen $s \in (-1, 0)$ und $t \in (0, 1)$ Null

Typ der Extrema bei ± 1 $\implies$

- lokales Minimum bei s, da $p(-1) = 0$, $p < 0$ auf $(-1, 0)$
- lokales Maximum bei t $p(1) = 0$, $p > 0$ auf $(0, 1)$

Beispiel

Schachtel möglichst großen Volumens gemäß dem abgebildeten Schnitt/Falt-muster



Volumen

$$V(h) = \underbrace{(1-2h)}_{\text{Länge}} \cdot \underbrace{(1-2h)/2}_{\text{Breite}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Höhe}} = 2h^3 - 2h^2 + \frac{1}{2}h$$

Nullsetzen der Ableitung,

$$V'(h) = 6h^2 - 4h + \frac{1}{2} \stackrel{!}{=} 0$$

bzw. $h^2 - (2/3)h + 1/12 \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightsquigarrow$

$$h = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{12}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4-1}{36}} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}$$

geometrisch sinnvoll: $h = 1/6$ mit

$$V(1/6) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{27}$$

Maximum auf dem zulässigen Bereich $h \in [0, 1/2]$, denn $V \geq 0$ und $V(0) = V(1/2) = 0$